كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية المتقطعة

الإحصاء 3 -

hamida.hassini@univ-

جامعة تلمسان

08/03/2024

مفتاح المصطلحات

مدخل القاموس

مرجع عام

قائمة المحتويات

وحدة 5

مقدمة 7

I-المحور الأول: أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات المتقطعة 9

آ. قانون بارنولي (Distribution de Bernoulli)..... 9

ب. توزيع ذي الحدين الثنائي (Distribution binomiale)..... 9

پ. توزيع بواسون (Distribution de Poisson)..... 10

ت. تمرين..... 10

ث. التوزيع الهندسي (Distribution géométrique)..... 11

ج. التوزيع فوق الهندسي (Distribution hyper géométrique)..... 11

چ. تمرين..... 12

خاتمة 13

حل التمارين 15

وحدة

- نهدف في نهاية هذا المحور إلى :

تعريف الطالب بأهم قوانين التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل

التمييز بين قوانين التوزيع الاحتمالي للتجارب المستقلة والتجارب غير المستقلة عن بعضها البعض

التمييز بين قوانين التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متقطع أحادي التجربة ت.برنولي و متعدد المحاولات الثنائية أو متعدد الحدود

استخدام التوزيع الاحتمالي الملائم للتجارب العشوائية المرتبطة بوقوع الحدث أول مرة أو بعد عدة محاولات في التجربة العشوائية المستقلة.

مقدمة

تتبع الظواهر التي تشتمل على المتغيرات العشوائية المتقطعة توزيعات احتمالية معينة، وهي التوزيعات التي يمكن حساب احتمالات قيمها عن طريق معادلة رياضية، تسمى بدالة الاحتمال، وهذه المعادلة لها معالم معينة، تعتمد على معالم المجتمع الذي ينسب له هذا التوزيع، وهي الأساس في حساب القيم الاحتمالية للتوزيع الاحتمالي للمجتمع محل الدراسة، ومن أهم التوزيعات التي سيتم دراستها، توزيع برنولي، توزيع ثنائي الحدين، توزيع بواسون التوزيع الهندسي والتوزيع الفوق الهندسي.

I المحور الأول: أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات المتقطعة

آ. قانون بارنولي (Distribution de Bernoulli)

إن أساس التوزيعات الخاصة بالمتغير المتقطع هو صيغة قانون بارنولي (أو تجربة بارنولي) حيث نقول عن تجربة أنها "برنولية" إذا كانت تحتمل نتيجتين (حدثين) متنافيتين. نرمز عادة ب(P)"احتمال النجاح" لاحتمال تحقق الحدث A أو النجاح ، و(q = 1 - p) احتمال الحدث المعاكس (الفشل). ويأخذ هذا التوزيع الصيغة التالية:

$X \sim B(P) \rightarrow X = \{0;1\}$

ومنه فإن قيم الاحتمال للمتغير العشوائي تأخذ الشكل الآتي:[1]

$P(X=1)=p$

$P(X=0)=q;\ q=1-p$

Xi	0	1
p(x=xi)	p_1	p

جدول1 الشكل 1: القيم الإحتمالية في تجربة بارنولي

ب. توزيع ذي الحدين الثنائي (Distribution binomiale)

يعتبر أكثر التوزيعات الاحتمالية استخداما في المتغير العشوائي المتقطع، فإذا كررنا تجربة برنولي n مرة فإن X (عدد مرات النجاح) هو متغير عشوائي يأخذ القيم: **X = 0, 1, 2, 3, . . . n**

- شروط استخدام التوزيع الثنائي

o تجربة برنولية مكررة عدد محدد من المرات.

o احتمال النجاح في التجربة ثابت (التجارب مستقلة).

- القانون الاحتمالي للتوزيع ذي الحدين:

يتم التعبير عن المتغير العشوائي المتقطع **x** الذي يتبع توزيع ذي الحدين ب(**X ~ B(n,p** ، حيث x المتغير العشوائي الذي يمثل عدد مرات النجاح، p احتمال النجاح في التجربة الواحدة (يبقى ثابت عند تكرار التجربة)، (q = 1-p) احتمال الفشل و n عدد التجارب.

ويكتب قانون التوزيع الثنائي (توزيع ذي الحدين) كالآتي:

$$P(X=x)=C_n^x p^x (1-p)^{n-x}$$

خصائص التوزيع الثنائي (توزيع ذي الحدين)

التوقع والتباين: يمكن اعتبار X مجموع متغيرات مستقلة برنولية حيث:

$X = X1 + X2 + \dots X\,i+ \dots + Xn$

لها نفس المعلمة p وبالتالي نفس التوقع $(E(Xi) = p)$ أيضا.

إذا باستخدام خصائص التوقع والتباين نجد:

$= E(X) = E(X1 + X2 + \dots Xi + \dots + Xn) = \Sigma E(Xi) = \Sigma pi = n\,p$

$E(X) = np$ <

$V(X) = V(X1 + X2 + \dots Xi + \dots + Xn$

إذن

$V(X) = \Sigma V(Xi) = \Sigma pq$ =>**$V(X) = npq$**

ب. توزيع بواسون (Distribution de Poisson)

إذا كان المتغير العشوائي يعتمد على عنصر الزمان أو المكان في تحديد القيمة الاحتمالية، أي عندما تتكرر تجربة بارنولي باستمرار ويصبح عدد مرات تكرار التجربة مقاسا بالزمن، فإن التوزيع الاحتمالي المناسب هو التوزيع البواسوني ، ونكتب(**$X \sim P(\lambda)$**

و تعرف دالته الإحتمالية بالصيغة الآتية:[2]

$$p(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \qquad x = 0,1,2,\dots$$

خصائص توزيع بواسون:

التوقع :

$= ()$

التباين:

$= (\ )$

إذن بالنسبة لتوزيع بواسون يكون التوقع الرياضي هو نفسه التباين الذي يساوي وهي ميزة ينفرد بها هذا التوزيع.

ت. تمرين

[15 ص 1 حل رقم]

حدد طبيعة القانون الإحتمالي الموافق لهذه الحالة:

إجابة طالب(ة) على أسئلة ورقة الامتحان في مقياس الاحصاء 2

- ○ توزيع ذي الحدين
- ○ توزيع بواسون

يتلقى مستقبل المكالمات في قسم الشرطة بالمدينة أ متوسط 10 مكالمات في الساعة الواحدة أي 60 دقيقة

- ضمن هذه التجربة العشوائية ماهي قيمة (λ) ؟

تمرين

ماهو التوزيع الإحتمالي ل التجربة التالية : رمي زهرة نرد مرة واحدة ، وندون النتيجة الظاهرة على الوجه العلوي

- ☐ توزيع ذي الحدين
- ☐ تجربة عشوائية، توزيعها غير محدد
- ☐ توزيع بواسون

ث. التوزيع الهندسي (Distribution géométrique)

يعتمد هذا التوزيع أيضا على تجربة بارنولي، وهذه المرة نكرر التجربة إلى غاية الحصول على النتيجة أو الحدث المطلوب (نجاح مرة واحدة).

و إذا رمزنا لاحتمال النجاح ب p ولاحتمال الفشل ب q فالمتغيرة العشوائية X تمثل عدد مرات تكرار التجربة (بما فيها المرة التي حصل فيها النجاح) عندئذ نقول أن هذا المتغير يتبع التوزيع الهندسي. [3]

وما يميز هذا التوزيع أنه وضع ليتجاوز شرط استقلالية الأحداث عن بعضها البعض، فعدما لا يتحقق هذا الشرط فإن التوزيع المناسب للمتغير العشوائي يصبح التوزيع الهندسي.

وبصفة عامة فإن احتمال أي قيمة ل X يعبر عنه كما يلي:[4]

$$P(X=x)=q^{x-1}p \quad , \quad X=1,2,3,\dots$$

خصائص التوزيع الهندسي:

التوقع:

$=1/p$

التباين:

$\text{var}(x)=p/q^2$

ج. التوزيع فوق الهندسي (Distribution hyper géométrique)

يعتبر أنسب التوزيعات الملائمة عندما لا تتحقق الصفتين الملازمتين لتوزيع ثنائي الحدين والمتمثلتين في:

- استقلال المحاولات(التكرارات)
- وكذلك ثبات احتمال الحدث الذي نهتم بدراسته (النجاح مثلا).

وعليه فإنه في حالة عدم تحقق ذلك يتم استخدام ما يسمى بقانون التوزيع الهندسي الزائدي (التوزيع الفوق الهندسي) حيث نكتب :

X ~ H(N,N2;p)

ويكتب القانون الاحتمالي للتوزيع الفوق الهندسي كالآتي:

[5] $$p(X=k)=\frac{C_m^k \times C_{N-m}^{n-k}}{C_N^n}$$

خصائص التوزيع الهندسي الزائد المتعدد:

التوقع:

() = (M/N)=n.p
التباين:
()= (N-n/N-1) .n.p.q

ج. تمرين

[15 ص 2 حل رقم]

ماهو التوزيع الإحتمالي لهذا المتغير

في امتحان البكالوريا لعام 2017 ، تمكن مترشح حر من اجتياز الإمتحان في شعبة إقتصاد وتسيير لأول مرة
بعد 06 محاولات

ماهو التوزيع الإحتمالي لهذه الحالة

يحتوى صندوق على 10 كرات منهم 6 كرات بيضاء، يتم سحب عشوائيا 3 كرات في أن واحد أي السحب بدون إرجاع.

تمرين

نقول أن المتغير العشوائي يخضع للتوزيع الهندسي ضمن التجربة العشوائية إذا كانت ...

خاتمة

إن عملية التوصيف الدقيق للتجارب العشوائية أمر بالغ الأهمية لا سيما عند التعامل مع ظروف متماثل، حيث تم وضع قوانين التوزيع الاحتمالي حتى تسرع عملية الوصول إلى النتائج، والتي نجد منها التوزيع الذي يأخذ فيه المتغير العشوائي قيمتين فقط كالتوزيع البرنولي، وهناك من يتطلب تحقق حدثين الأصلي والنافي مثل توزيع التنائي، وهناك من يعتمد على تكرار التجربة إلى غاية الحصول على أو نتيجة، ولدينا أيضا التوزيع الذي يطبق في حالة الاعتماد على البعد الزمني أو المكاني في تقدير القيمة الاحتمالية .

حل التمارين

> 1 (ص 10)

حدد طبيعة القانون الإحتمالي الموافق لهذه الحالة:

◉	توزيع ذي الحدين
○	توزيع بواسون

يتلقى مستقبل المكالمات في قسم الشرطة بالمدينة أ متوسط 10 مكالمات في الساعة الواحدة أي 60 دقيقة

10

تمرين

☐	توزيع ذي الحدين
☑	تجربة عشوائية، توزيعها غير محدد
☐	توزيع بواسون

> 2 (ص 12)

ماهو التوزيع الإحتمالي لهذا المتغير

توزيع الفوق الهندسي

ماهو التوزيع الإحتمالي لهذه الحالة

التوزيع الفوق الهندسي

نلاحظ بأن الأحداث غير مستلقة حيث أن السحب يتم بدون إرجاع، وبالتالي فإن التوزيع الإحتمالي هو التوزيع الفوق الهندسي

تمرين

التجارب مستقلة