Fiche de TD N°1

Exercice 1. Calculer les composées $f \circ g$ et $g \circ f$ où $f(x) = e^{3x} + x$ et $g(x) = \ln(x)$.

***Exercice* 2.** Est-ce que la fonction définie par $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$ est continue en $x_0 = 0$?

Exercice 3. Montrer que l'équation $4x^3 - x = 1$ admet une solution dans l'intervalle $[0, 1]$.

***Exercice* 4.** Calculez les dérivées des fonctions définies par :

1) $g_1(x) = x\ln(3x^2 + 4)$ 2) $g_3(x) = arctg(2/x)$

3) $g_4(x) = arcsin(\sqrt{x - 1})$ 4) $g_5(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x}$

***Exercice* 5.** Les fonctions logistiques ont la forme : $f(x) = \frac{K}{1+ae^{-rx}}$, où K, a, r sont des réels. Ces fonctions modélisent la croissance de populations au cours du temps x. Etudier fonction $f(x) = \frac{2}{1+e^{-2x}}$ et tracer son graphe.

Exercice 6. Utiliser la proposition suivante :

Proposition *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$. Alors, f est constante sur $[a, b]$.*

pour montrer que : 1) $\ln(ax) = \ln(a) + \ln(x)$ pour $a, x > 0$.

2) $\arcsin(x) + arccos(x) = \frac{\pi}{2}$ pour $x \in [-1,1]$

Exercice 7. Soit $f(x) = 3e^{-x} + e^{2x}$. Vérifier que $f''(x) - f(x) = 3e^x$.

Exercice 8. Utiliser la règle de l'Hôpital pour calculer les limites :

1) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^5-x-1}{3x^7+x^2-4}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-\ln(x+1)-1}{x^2}$ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right)\ln(x)$ 4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{2x}$.

Exercice 9. Utiliser l'intégration par parties : $\int U'V = UV - \int UV'$, pour calculer les primitives des fonctions :

$$f(x) = x^4 \ln(x), \qquad g(x) = x\, arctg(x) \quad \text{et} \quad h(x) = xe^{2x}.$$

Exercice 10. Calculer les intégrales :

1) $\int \frac{1}{x^2-3} dx$ 2) $\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2-x-2} dx$

3) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+4} dx$ (poser $t = e^x$) 4) $\int_1^9 e^{2\sqrt{x}} dx$ (poser $t = \sqrt{x}$)