الفصل الخامس : التوزيع الطبيعي

مقدمة

يمكن نمذجة العديد من الظواهر التي تحصل في الحياة الواقعية باستخدام النماذج الاحتمالية بما يتناسب مع مجموعة من البيانات، عندها يمكن تلخيص كمية كبيرة من البيانات باستخدام توزيعات باقل معاملات.

تصلح التوزيعات الاحتمالية للتحليل الرياضي ، لكن من المهم أن نتذكّر أن جميع النماذج غير مثالية، ولا يمكن للبيانات الصادرة من العالم الحقيقي أن تتناسب مع التوزيع الاحتمالي بصورة مثالية.

التوزيع الطبيعي او توزيع Gauss [1]

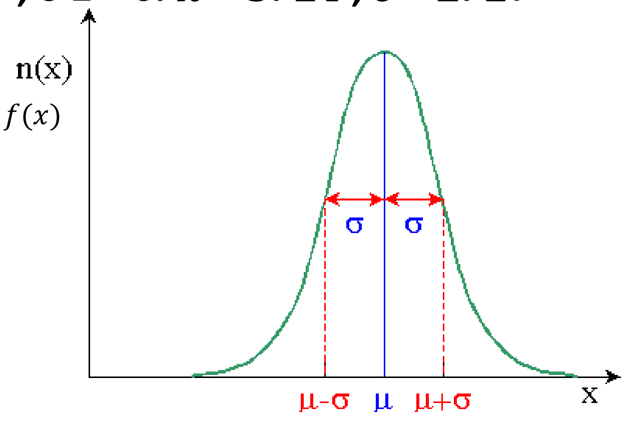
يعتبر التوزيع الطبيعي من التوزيعات الاكثر استخداما نظرا لعدة اسباب نذكر منها

- اغلب الظواهر تتبع التوزيع الطبيعي التفاوت الشخصي في الصفات.
- كثير من التوزيعات الاخرى يمكن تقريبها الى التوزيع الطبيعي خاصة في العينات ذات الحجم الكبير. توزيع ذي الحدين ، توزيع بواسوني توزيع الأسي
- في كثير من المسائل تكون المتغيرات غير معروف توزيعها ونريد معرفة مجموع توزيعها ومتوسطها وهنا نستدعي نظرية النهاية المركزية والتي تنص ان التوزيع سيقترب [2] من التوزيع الطبيعي.

1.1-دالة التوزيع الطبيعي

$$-\infty < x < \infty \; ; -\infty < \mu < \infty , \sigma^2 > 0. \; \pi = 3.14 , e = 2.17$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



- المتوسط
- الانحراف المعياري

[1] loi de Gauss, en l'honneur du grand mathématicien allemand Karl Friederich Gauss (1777-1855).

[2] التقريب لديه نظريتين قانون الاعداد الكبيرة ونظرية النهاية المركزية

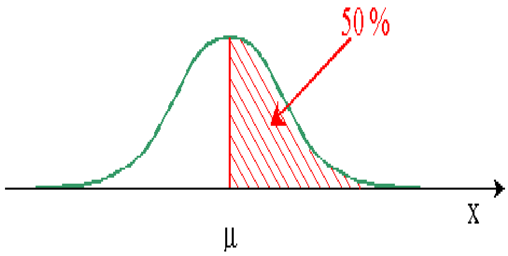
- n   العدد الاجمالي للأفراد في العينة

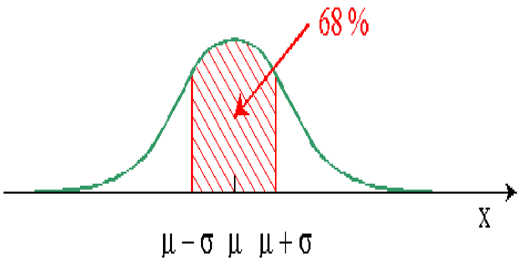
2.1- خواص التوزيع الطبيعي :

- الوسيط مساو للمنوال ومساو للمتوسط في حالة التوزيع الطبيعي
- التوزيع متناظر نحو محور المتوسط
- كلما زاد الانحراف زاد انبساط التوزيع وكلما قل تطاول التوزيع
- درجة الالتواء للتوزيع الطبيعي هي 3

عندما يكون توزيع افراد العينة يتبع توزيع الطبيعي

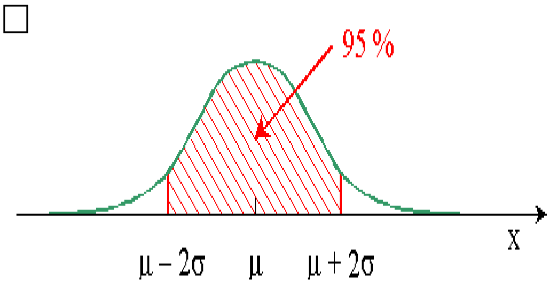
- 50 % من الافراد اقل من المتوسط μ و50 % من الأفراد اكثر من المتوسط

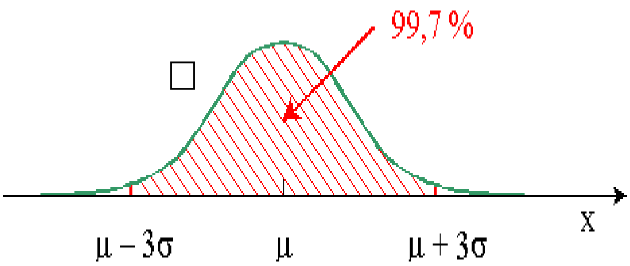




68 % من الأفراد موجودة في المجال $[\mu - \sigma - \mu + \sigma]$

95 % من الأفراد موجودة في المجال $[\mu - 2\sigma - \mu + 2\sigma]$





99.7 % من الأفراد موجودة في المجال $[\mu - 3\sigma - \mu + 3\sigma]$

1- التوزيع الطبيعي القياسي او يسمى توزيع z:هو التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي يساوي صفر وتباينه يساوي واحد ($\delta = 1, \mu = 0$) فلو اسمينا المتغير Z على انه متغير عشوائي يخضع للتوزيع الطبيعي القياسي المعياري فهذا يدل على ان توزيع المتغير Z هو التوزيع الطبيعي الذي

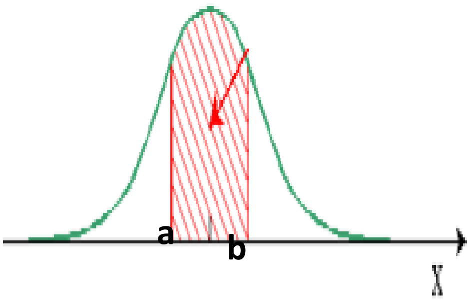
معدله يساوي صفر وتباينه يساوي واحد (σ) اي ان المعادلة او دالة التوزيع الطبيعي القياسي يمكن كتابتها بالشكل التالي

$$f(x) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

ونلاحظ ان هنا ان كل قيمة من قيم x يقابلها قيمة من قيم Z وتسمى قيم Z القيم المعيارية او القياسية المقابلة لقيم x .

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

وتحسب المساحة بالتكامل



$$z \le b) = \int_a^b \frac{n}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

ولتسهيل عملية حساب الاحتمالات او بالأحرى المساحة الواقعة تحت المنحنى دون اللجوء الى حال التكاملات وضع جدول اين تم حساب كل الاحتمالات لهذا التوزيع بمجرد معرفة aو b

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

فيما يساعدنا جدول التوزيع الطبيعي القياسي

- ايجاد المساحة الواقعة تحت المنحنى بمعرفة على الاقل حد (a) او (a و bمعا) مثال لنفرض ان معدلات الباكالوريا تتبع توزيع طبيعي بمتوسط 9 وانحراف معياري 5 صادفنا احد مترشحي

الباكالوريا اوجد احتمال ان يكون قد حصل على معدل اقل من 12 ، معدل محصور بين 4 و 9، معدل محصور بين 14 و 20 اوجد عدد الطلة الذين تحصلوا على معدل يفوق 16 اذا كان عدد المترشحين هو 200 الف مترشح.

$$x \sim N(\mu;\sigma);\, x \sim N(9;5)$$

الوحدات الطبيعية	القانون	الوحدات القياسية
12	$\frac{x-\mu}{\sigma}$	$\frac{x-\mu}{\sigma}=\frac{12-9}{5}=0.6\square$
4		$\frac{x-\mu}{\sigma}=\frac{4-9}{5}=-1$
9		$\frac{x-\mu}{\sigma}=\frac{9-9}{5}=0$
14		$\frac{x-\mu}{\sigma}=\frac{14-9}{5}=1$
20		$\frac{x-\mu}{\sigma}=\frac{20-9}{5}=2.2$
16		$\frac{x-\mu}{\sigma}=\frac{16-9}{5}=1.4$

$$p(x<12)=p(x<0.6)$$

من جدول حساب المساحة نجد انه يعطي المساحة الاقل من a مع مراعاة التناظر وبالتالي المساحة الواجب حسابها هي المساحة الاقل من 0.6 ونجدها من الجدول 0.7257.

$$p(4 \leq x \leq 9)=p(-1 \leq x \leq 0)$$

من جدول حساب المساحة نجد انه يعطي المساحة الاقل من a مع مراعاة التناظر وبالتالي المساحة الواجب حسابها هي المساحة الاقل من 1 مطروح منها 0.5 ونجدها من الجدول 0.3413= - .0.84130.5

$$p(14 \leq x \leq 20)=p(1 \leq x \leq 2.2)$$

من جدول حساب المساحة نجد انه يعطي المساحة الاقل من a مع مراعاة التناظر وبالتالي المساحة الواجب حسابها هي المساحة الاقل من 2.2 مطروح منها المساحة الاقل من 1 من الجدول 0.1448= 0.9861-0.8413.

$$p(x \geq 16) = p(x \geq 1.4)$$

من جدول حساب المساحة نجد انه يعطي المساحة الاقل من a مع مراعاة التناظر وبالتالي المساحة الواجب حسابها هي المساحة الكلية (1) مطروحا منها المساحة الاقل من 1.4 من الجدول-1

0.9192=0.0808

عدد الطلبة هو انطلاقا من النسبة المئوية هو8.08 % وبالتالي العدد هو

$$200\ 000 \times 0.0808 = 16160$$ مترشح

- ايجاد حدود الاحتمال بمعرفة الاحتمال ذاته مثال لنفرض ان معدلات الباكالوريا تتبع توزيع طبيعي بمتوسط 9 وانحراف معياري 5 . 23.89 % تحصلوا على علامة اقل من x اوجد قيمة x

- $x \sim N(\mu;\sigma); x \sim N(9;5)$

الوحدات الطبيعية	القانون	الوحدات القياسية
x	$\dfrac{x-\mu}{\sigma}$	$\dfrac{x-\mu}{\sigma} = \dfrac{x-9}{5} = a$

المساحة الاقل من a والمساوية ل 0.2398 ستكون في الطرف الايسر اي القيمة ستكون سالبة للمنحنى القياسي مع مراعات التناظر سنجدها مساوية للمساحة الكلية مطروحة منها المساحة الاقل من a لتساوي 0.2389 اي $1 - f = 0.2389; f = 1 - 0.2389 = 0.7611$

$a = 0.7611$ من الجدول نجد ان a=0.71 مع القيمة السالبة وبالتالي

$$\frac{x-9}{5} = -0.71 \ ; -0.71 \times 5 = x - 9; x = 9 - 3.55 = 5.45$$

تقريب توزيع ذي الحدين الة التوزيع الطبيعي :

يمكن تقريب توزيع ذي الحدين الى التوزيع الطبيعي اذا كان :

- n اكبر او يساوي 30
- np اكبر من 5
- nq اكبر من 5

تقريب توزيع البواسوني الى توزيع الطبيعي

عندما تكون λ اكبر او يساوي 20