Modulation FM

Objectifs partie 4 :

A l'issu de ce travail vous serez capable de :

1. Définir la modulation de fréquence.

3. Comprendre le principe de fonctionnement de la modulation FM.

4. Appliquer les notions acquis pour résoudre les exercices proposer.

Modulation FM :

Le message basse-fréquence s(t) à transmettre est inscrit dans la fréquence instantanée de la porteuse.

Sa fréquence dépend alors du temps et s'écrit :

$f(t) = f_o + k.s(t)$

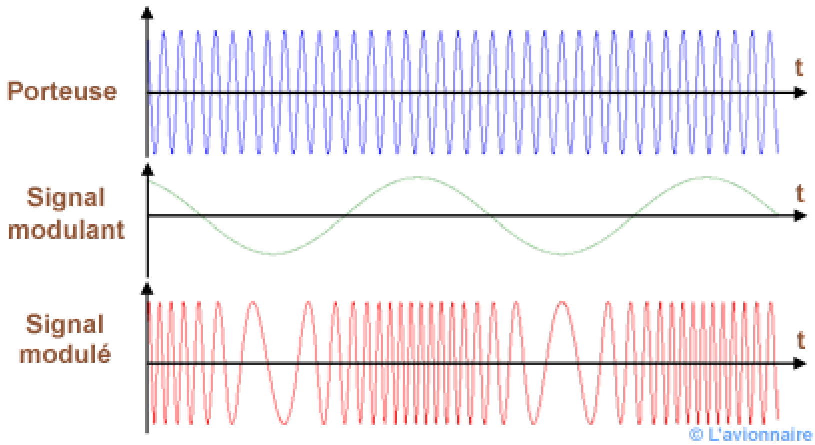
avec s(t) : signal modulant

f_o : fréquence de la porteuse non modulée

On passe aisément de la fréquence à la pulsation instantanée : $\omega(t) = 2\pi.f(t) = \omega_o + 2\pi ks(t)$

puis à la phase en intégrant la pulsation : $\theta(t) = \int \omega(t)dt = \omega_o t + 2\pi k \int s(t)dt$.

Le signal modulé en fréquence est un signal sinusoïdal d'amplitude E et de fréquence f(t). Son expression mathématique est donc la suivante : $e(t) = E\cos(\theta(t)) = E\cos(\omega_o t + 2\pi k \int s(t)dt)$.



Si le signal modulant s(t) varie entre les valeurs extrêmes $+S_{max}$ et $-S_{max}$, la fréquence varie au rythme du signal modulant entre deux valeurs extrêmes : $f_{min} = f_o - kS_{max}$ et $f_{max} = f_o + kS_{max}$

La grandeur kSmax est appelée excursion en fréquence et notée $\Delta f = \pm kS_{max}$.

Indice de modulation et spectre :

Lorsque le signal modulant est sinusoïdal $s(t) = a\cos(\Omega t)$

la fréquence instantanée s'écrit : $f(t) = f_o + k\,a\cos(\Omega t)$

et l'excursion en fréquence vaut : $\Delta f = \pm ka$

On définit l'indice de modulation m par : $\mathbf{m = \Delta f / F}$

Le spectre d'un signal FM est complexe et ne se calcule mathématiquement que dans le cas particulier où le signal basse-fréquence est sinusoïdal :

$e(t) = E\cos(\theta(t)) = E\cos(\ \omega_o t + 2\pi k \int s(t)dt\ ) = E\cos(\ \omega_o t + \frac{2\pi ka}{\Omega}\sin(\Omega t)\ )$

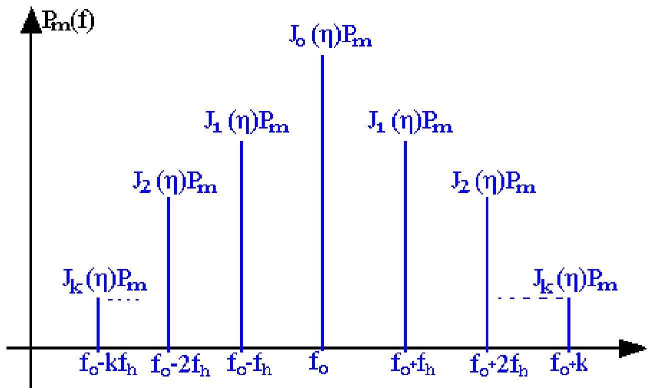
d'où : $e(t) = E\cos(\ \omega_o t + \frac{ka}{F}\sin(\Omega t)\ )$

$e(t) = E\cos(\ \omega_o t + \frac{ka}{F}\sin(\Omega t)\ ) = E\cos(\ \omega_o t + m\sin(\Omega t)\ )$

Cette expression se développe à l'aide des fonctions de Bessel : $e(t) = EJ_0(m)\cos(\omega_o t + \phi o) + EJ_1(m)\cos[(\omega_o \pm\Omega)t + \phi 1] + EJ_2(m)\cos[(\omega_o \pm 2\Omega)t + \phi 2] + ...$

où $J_0(m)$, $J_1(m)$, $J_2(m)$ ... sont les fonctions de Bessel paramétrées en m

Le spectre du signal FM a donc l'allure générale suivante :



Une porteuse (fréquence f) modulée par un signal basse-fréquence sinusoïdal (fréquence F) est donc caractérisée par :

• un spectre centré sur f et symétrique

• des raies espacées de F dont l'amplitude est donnée par les fonctions de Bessel

• un nombre de raies qui augmente avec l'indice de modulation

• une bande occupée B supérieure à l'excursion en fréquence totale $2\Delta f$

La bande occupée B peut être lue sur le tracé du spectre ou calculée par la formule de Carson :

B = 2(Δf + F) [1] .

SERIE TD N04

Exercice 1 :

On donne l'expression suivante $s(t)=10 \cos(10^6\pi t+8 \sin (10^3\pi t))$ 1) que représente ce signal ?

2) donner la fréquence modulante

3) la fréquence de la porteuse

4) l'indice de modulation

5) la dérivation maximum de fréquence

Exercice 2 :

1. Quelle est la bande de fréquences Bf d'un signal FM dont l'indice de modulation d vaut 0,2 et la fréquence f_m du signal modulant est de 10 KHz?

2. Quelle est la bande de fréquences d'un signal FM dont l'indice de modulation d vaut 6 et la fréquence f_m du signal modulant est de 10 KHz?

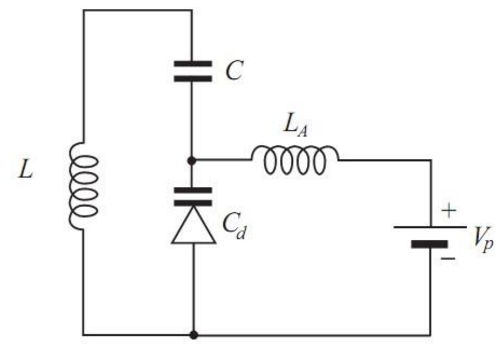
3. Quelle est la bande de fréquences d'un signal FM dont l'indice de modulation d vaut 30 et la fréquence f_m du signal modulant est de 1,5 KHz ?

Exercice 3 :

La fréquence instantanée maximale d'un signal FM est 105,525 MHz et la fréquence de la porteuse est 105,45 MHz. Sachant que la fréquence du signal modulant est de 2,5 KHz, calculer l'excursion de fréquence, l'indice de modulation ainsi que la bande de fréquences occupée par ce signal.

Exercice 4:

On considère le circuit résonnant LC suivant, utilisé dans la réalisation d’un oscillateur:



La diode varicap se comporte comme un condensateur de capacité $C_d = \frac{K}{(V0+Vp)^{0,5}}$ ou K et V_0 sont des constantes et Vp est la tension de polarisation. Cette diode est utilisée dans le circuit résonnant où L_A est une self d’arrêt d’impédance négligeable en basse fréquence et élevée à la fréquence d’oscillation f_0. On donne L =0,32 µH, C = 10 000 pF, V_0 =0,36 V. Pour Vp=0V, on a Cd = 1 500 pF.

1. Exprimer la fréquence d’oscillation f0 du circuit et montrer qu’elle se met sous la forme $f_{0=\sqrt{B+(D+Vp)^{0.5}}}$. Donner les valeurs numeriques de A, B et D. Tracer le graphe de f0 en fonction de Vp lorsque Vp varie entre 0 et 12 V (échelle: 1 V/cm et 1 MHz/cm). Déterminer la valeur de Vp pour avoir une fréquence f_0 = 15 MHz.

2. La tension V_p est la somme d’une tension continue V = 7 V et d’une tension sinusoïdale v(t) d’amplitude V_m =0,2 V et de fréquence f_m = 20 KHz. Montrer que l’oscillateur est modulé sinusoïdalement en fréquence. Donner sa fréquence de repos f0 et sa sensibilité kf.

3.Déterminer l’indice de modulation β du signal FM obtenu, ainsi que la bande passante nécessaire pour transmettre ce signal.

Exercice 5 :

L’architecture classique d’un synthétiseur de fréquences à division entière utilisant une boucle à verrouillage de phase (PLL) est illustrée sur la figure 2.

1- Donner l’expression de la fréquence de sortie lorsque la boucle est verrouillée.

2- Si le synthétiseur de fréquences (figure 2) est exploité pour la réception dans les standards de la troisième génération (3G) sur UMTS et dont le rapport de division change sa valeur entre 422 et 434, avec un pas de 2 ; 422 :2 :434

a- Quelle sont les fréquences générées par ce synthétiseur, sachant que la fréquence de comparaison (Fref) est de 5 MHz.
b- b- Quel est le nombre de porteuses synthétisées par ce système.

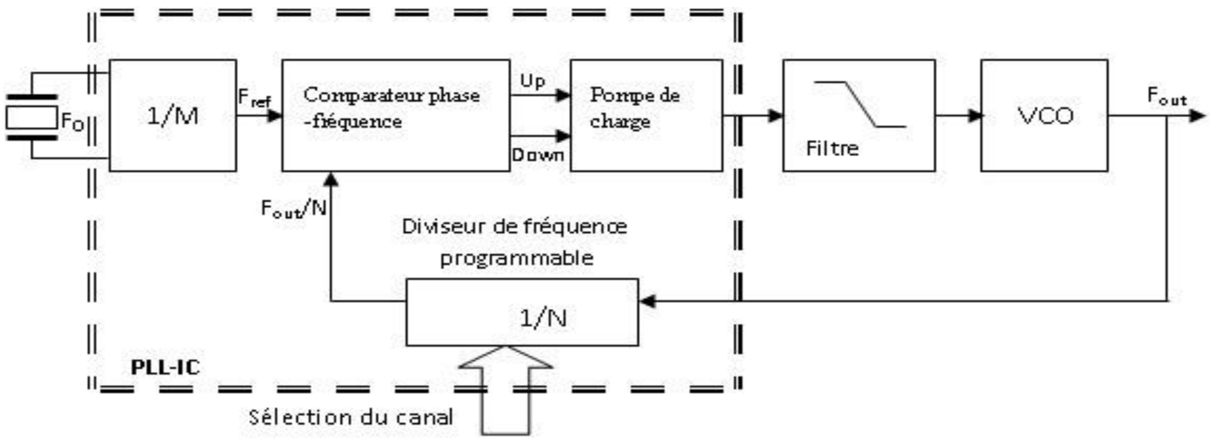


Figure 2. Synthétiseur de fréquences classique à base de PLL

Solution

Série 04
Modulation FM

Exercice 01:

un signal modulé en fréquence s'écrit sous la forme :

$$V_{FM}(t) = V_p \cdot \cos\left(2\pi f_p t + m \sin(2\pi f_m t)\right)$$

f_p : fréquence de la porteuse

m : indice de modulation

f_m : fréquence du signal modulant (message basse fréquence)

on a $s(t) = 10 \cos(\underbrace{10^6\pi}_{w_p} t + \underbrace{8}_{m} \sin(\underbrace{10^3\pi}_{w_m} t))$

1)- $s(t)$ est un signal modulé en fréquence (FM)

2)- la fréquence modulante :

$$w_m = 10^3\pi = 2\pi f_m \Rightarrow \boxed{f_m = \frac{\overbrace{10^3}^{1000}}{2} = 500\,Hz}$$

3)- la fréquence de la porteuse :

$$w_p = 10^6\cancel{\pi} = 2\cancel{\pi} f_p \Rightarrow \boxed{f_p = \frac{\overbrace{10^6}^{1000.000}}{2} = \overbrace{500KHz}^{500.000\,Hz}}$$

4)- l'indice de modulation : $\boxed{m = 8} = \frac{\Delta f}{f_m} \Rightarrow \Delta f = 8 f_m$

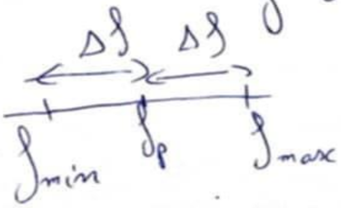
$= 8 \times 500$

$= 4000\,Hz$

$= 4\,KHz$

5)- la dérivation maximum de fréquence :

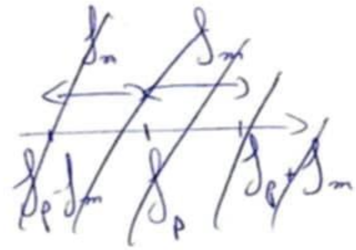
f varie entre f_{max} et f_{min}



$f_{min} = f_p - \Delta f$

$$\boxed{f_{max} = f_p + \Delta f = 500 + 4 = 504KHz}$$

Exercice 02:



1. B ? $m = 0,2$ $f_m = 10\,kHz$

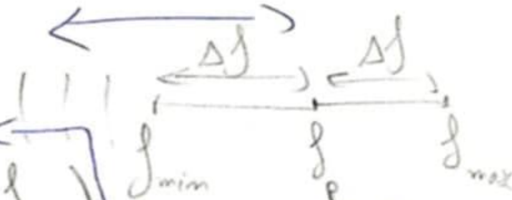
~~$m < 4$~~

$\cancel{B = 2 f_m = 2 \times 10 \times 10^3 = 20\,kHz}$

$m = \frac{\Delta f}{f_m} \Rightarrow \Delta f = m \times f_m = 0,2 \times 10 \times 10^3 = 2000\,Hz = 2\,kHz$

$B = 2(\Delta f + f_m)$

$B = 2(2 + 10) = 24\,kHz$



2. B ? $m = 6$ $f_m = 10\,kHz$

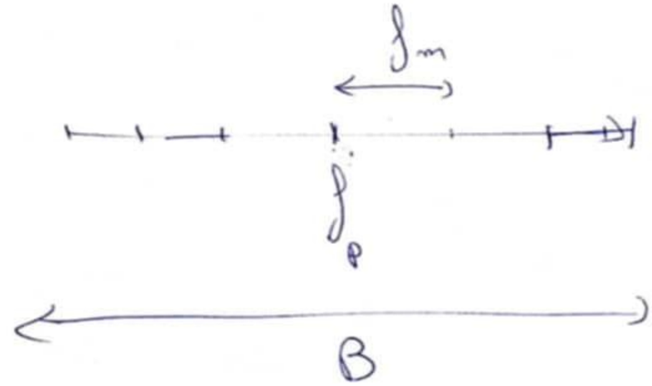
$m > 4$ $B = 2(\Delta f + f_m)$ formule de Carson

$m = \frac{\Delta f}{f_m} \Rightarrow \Delta f = m \times f_m = 6 \times 10 \times 10^3 = 60 \times 10^3\,Hz = 60\,kHz$

$B = 2(\Delta f + f_m)$

$B = 2(6 \times 10 \times 10^3 + 10^3)$

$= 2(60 + 10) = 140\,kHz$



3. même chose

$m = 30$ $f_m = 1.5\,kHz$

$m = \frac{\Delta f}{f_m} \Rightarrow \Delta f = m f_m = 30 \times 1,5 \times 10^3 = 45 \times 10^3 = 45\,kHz$

$B = 2(\Delta f + f_m) = 2(45 + 1,5) = 93\,kHz$

Exercice 03

$F_{i\,max}(t) = 105,525\ MHz = f_{max}$

$f_p = 105,45\ MHz$

$f_m = 2,5\ KHz$

1) calculer l'excursion de fréquence Δf ?

$f_{max} = f_p \mp \Delta f \Rightarrow \Delta f = f_{max} - f_p = 105.525 - 105,45$

$= 0.075\ MHz$

$= 0,075 \times 10^3$

$= 75\ KHz$

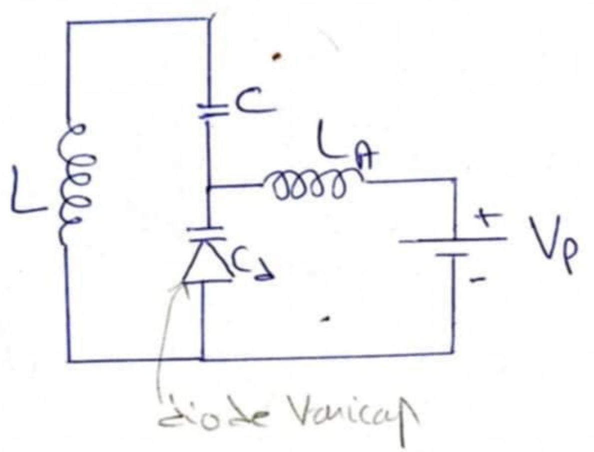
2) l'indice de Modulation $m = \dfrac{\Delta f}{f_m}$

$$m = \frac{75}{2,5} = 30$$

3) $B = 2(\Delta f + f_m) = 2(75 + 2,5) = 155\ KHz$

Exercice 04 :

on considère le circuit résonant LC suivant, utilisé dans la réalisation d'un oscillateur.



$$C_d = \frac{K}{(V_0+V_p)^{0,5}}$$

où K et V_0 sont des constantes

V_p tension de polarisation

L_A est une bobine

$Z_L = jL\omega$

→ circuit fermée en BF.

→ " ouvert en HF à la fréquence d'oscillation f_0

$L = 0,32\,\mu H$ $C = 10.000\,pF$ $V_0 = 0,36\,V$

pour $V_p = 0\,V$ on a $C_d = 1500\,pF$

1) f_0 ? $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{L\,C_{eq}}}$ avec $C_{eq} = \dfrac{C \cdot C_d}{C + C_d}$

$$f_0 = \frac{1 \left(\frac{C+C_d}{LCC_d}\right)^{1/2}}{2\pi\left(\frac{\cancel{LCC_d}}{\cancel{C+C_d}}\right)^{1/2}\left(\frac{\cancel{C+C_d}}{\cancel{LCC_d}}\right)^{1/2}} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{C+C_d}{LCC_d}\right)^{1/2} = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{C + \frac{\cancel{K}}{(V_0+V_p)^{0,5}}}{LC\,\frac{\cancel{K}}{(V_0+V_p)^{0,5}}}\right]^{1/2}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{C + K\,(V_0+V_p)^{-0,5}}{LC\,K\,(V_0+V_p)^{-0,5}}\right]^{1/2} \times \left[(V_0+V_p)^{+0,5}\right]^{1/2} \times \left[(V_0+V_p)^{0,5}\right]^{1/2}$$

$d(V_0+V_p)^{0,5} + \frac{K}{C})$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{C\left((V_0+V_p)^{0,5}+K\right)}{LCK}\right]^{1/2} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LK}}\sqrt{(V_0+V_p)^{0,5}+\frac{K}{C}}$$

$$\boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LK}}\sqrt{(V_0+V_p)^{0,5}+\frac{K}{C}}}$$

f_0 se met sous la forme $f_0 = A\sqrt{B + (D+V_p)^{0,5}}$

$A = \frac{1}{2\pi\sqrt{LK}}$; $B = \frac{K}{C}$; $D = V_0$

ou $C_d = \frac{K}{(V_0+V_p)^{0,5}}$

$(V_0 = 0,36\ V)$

pour $V_p = 0\ V \longrightarrow C_d = 1500\ pF$

on peut tirer la valeur de "K", $\boxed{K = C_d \cdot (V_0)^{0,5}}$

$= 1500 \times 10^{-12} \times (0,36)^{0,5}$

$= 900 \times 10^{-12}$

$= \boxed{900\ pF}$

$C = 10.000\ pF$

$L = 0,32\ \mu H$

$$\boxed{A = \frac{1}{2\pi\sqrt{LK}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{0,32\times10^{-6}\times900\times10^{-12}}} = 9,378\times10^{6}}$$

$$\boxed{B = \frac{K}{C} = \frac{900\times10^{-12}}{10.000\times10^{-12}} = 0,09}$$

$$\boxed{D = V_0 = 0,36\ V}$$

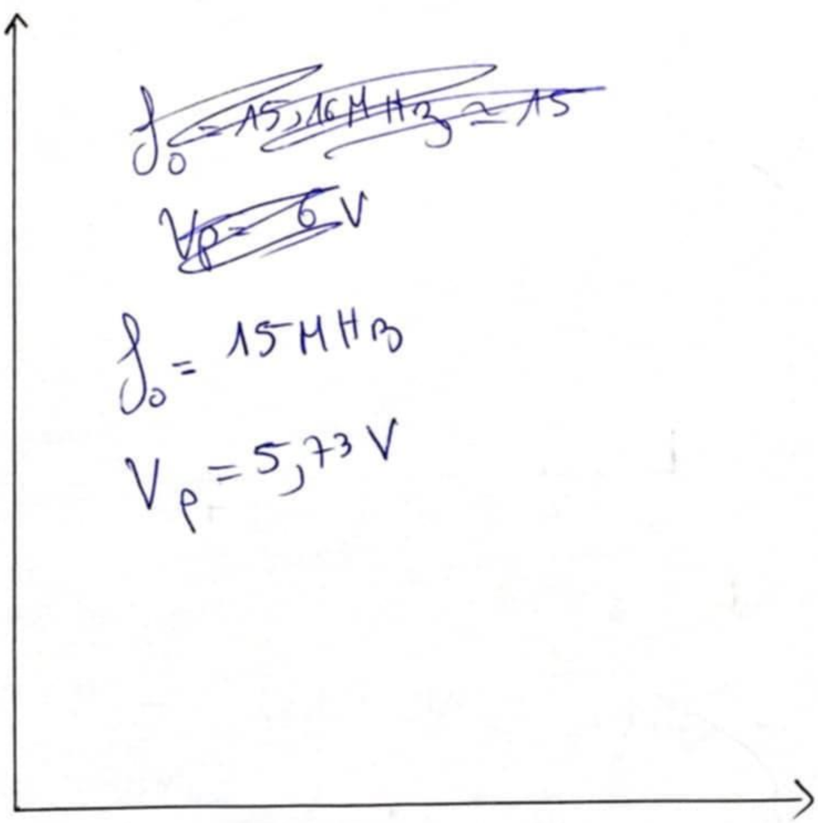
Traçage de f_0 en fonction de V_p lorsque V_p varie entre 0 et 12 V

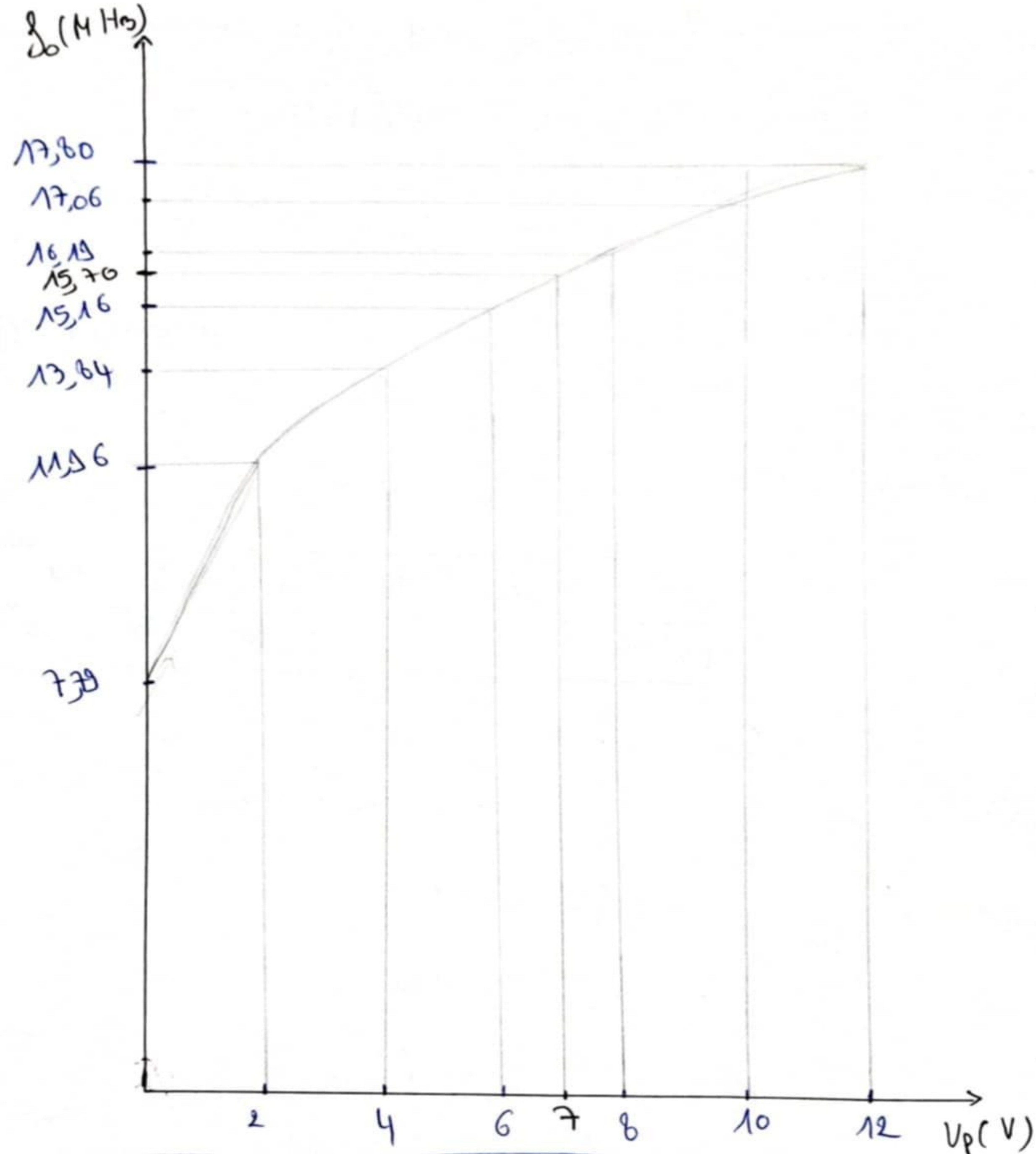
Echelle : 1 V/Cm et 1 MHz/Cm

on considère l'équation $\underline{\underline{f_0}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LK}} \sqrt{(V_0 + \underline{V_p})^{0,5} + \frac{K}{C}}$

on va remplacer les valeurs :
de L, K, V_0 et C et à chaque fois on varie Vp
de 0 V à 12 V
Remplir le tableau

V_p(V)	0	2	4	6	8	10	12
f_0(MHz)	7,79	11,36	13,84	15,16	16,19	17,06	17,80





$V_p = 7 + v(t) = V + v(t) \rightarrow v(t) = V_p - V$

$v(t) = 0{,}2 \cos(2\pi f_m t)$ $\quad f_m = 20$ KHz

$V_p = 7 + 0{,}2 \cos(2\pi f_m t)$

2) on a $V_p = V + v(t)$ avec $V = 7\,V$

$V_m = |v(t)|_{max} = 0{,}2\,V$ et $f_m = 20\,KHz$

pour montrer que l'oscillateur est modulé sinusoïdalement en fréquence, on peut effectuer un développement limité au premier ordre de $f_0(V_p)$ autour de $V_p = 7\,V$.

- le développement limité au premier ordre d'une fonction $f(x)$ autour d'un point x_0 s'écrit

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$f_0(V_p) = A\left[B + (D+V_p)^{0,5}\right]^{1/2}$$

donc $$f'_0(V_p) = \underbrace{\frac{A}{2}\left[B + (D+V_p)^{0,5}\right]^{-0,5}}_{} \times 0{,}5\,(D+V_p)^{-0,5} \;!!!$$

$$(\sqrt{y})' = \frac{y'}{2\sqrt{y}}$$

$$= \frac{0{,}25\,A}{\underbrace{\sqrt{B+(D+V_p)^{0,5}}}_{\frac{f_0(V_p)}{A}}\sqrt{(D+V_p)}}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

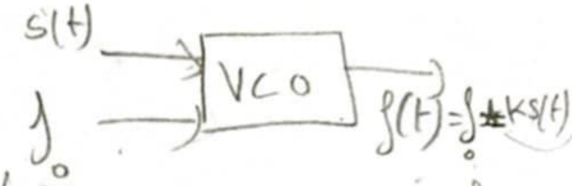
$f(x) = \sqrt{x}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$= \frac{0{,}25\,A^2}{f_0(V_p)\,(D+V_p)^{0,5}}$$

$$f_0(V_p) = \underbrace{f(V)}_{f_0(V)} + \underbrace{\frac{0{,}25\,A^2}{f_0(V_p)\,(D+V_p)^{0,5}}}_{K_f} \cdot \underbrace{(V_p - V)}_{v(t)}$$

$$K_f = \frac{0{,}25\ A^2}{f_0(V)(D+V_p)^{0,5}}$$



$$f_0(V_p) \simeq f_0(V) + K_f\ v(t)$$

$$\Delta f = K_f \ |\overset{V_m}{v(t)}|$$

la tension $v(t)$ étant sinusoïdale, la fréquence instantanée $f_0(V_p)$ varie sinusoïdalement autour de $f_0(V) \Rightarrow$ donc

l'oscillateur est modulé en fréquence

la fréquence de repos de l'oscillateur est :

$$f_0(V) = A\sqrt{B + (D+V)^{0,5}} = 9{,}378 \times \sqrt{0{,}09 + (0{,}36+7)^{0,5}} = 15{,}7\,\text{MHz}$$

Sa sensibilité est

$$K_f = \frac{0{,}25\ A^2}{f_0(V)\,(D+V_p)^{0,5}} = \frac{0{,}25 \times 9{,}378^2}{15{,}7\ \sqrt{0{,}36+7}} = 0{,}516\ \text{MHz}$$

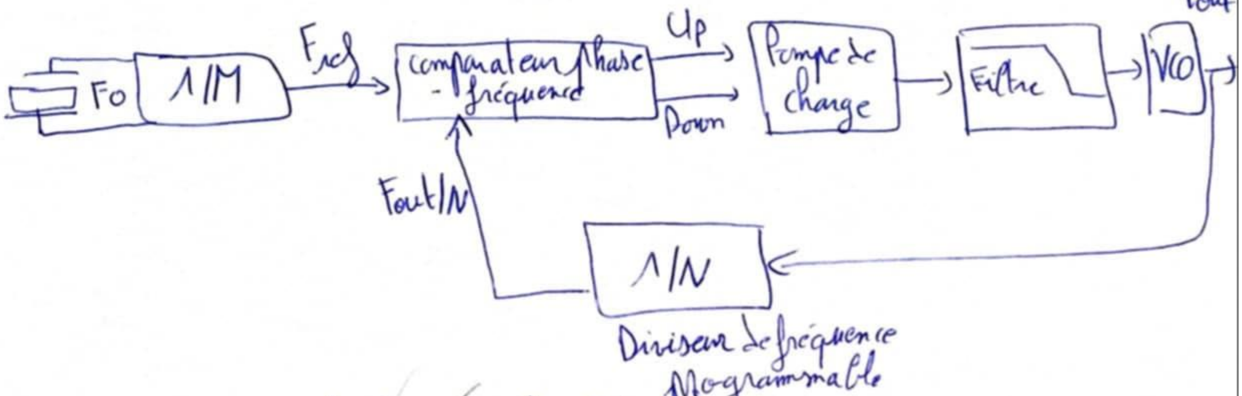
3) l'indice de modulation $\beta = \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{K_f\, V_m}{f_m} = \frac{0{,}516 \times 10^6 \times 0{,}2}{20 \times 10^3}$

$$\boxed{\beta = 5{,}16}$$

la bande passante nécessaire pour transmettre le signal FM est :

$$B_s = 2(\beta + 1) f_m = 2\,(5{,}16 + 1)\,20 = 246{,}4\,\text{kHz}$$

Exercice 05 :



boucle Verrouillée (absence du signal modulant s(t))

1- $F_{ref} = \frac{F_0}{M}$ (les deux fréquences à l'entrée du comparateur de phase sont égales)

$F_{ref} = \frac{F_{out}}{N} \Rightarrow \frac{F_0}{M} = \frac{F_{out}}{N} \Rightarrow F_{out} = \frac{N F_0}{M} = N F_{ref}$

$$\boxed{F_{out} = N F_{ref}}$$

2- $N = [422, 434]$

a) F_{out} ? $F_{ref} = 5\ MHz$

$F_{out_{min}} = N F_{ref} = 422 \times 5 = 2110\ MHz$

$F_{out_{max}} = N F_{ref} = 434 \times 5 = 2170\ MHz$

donc $F_{out} \in [2110 - 2170]\ MHz$ avec un pas de 10 MHz

car on a un pas de 2 $F_{out} = N F_{ref} = 2 \times 5 = 10\ MHz$

3- le nombre de porteuse synthétisées par ce système est 7

2110 2120 2130 2140 2150 2160 2170

Références :

[1] : http://www.eamac.ne/pdfs/ING%202%20Transmision%20du%20signal%20(2).pdf