الفصل الأول: توزيع برنولي، ذي الحدين وبواسون.

1. توزيع برنولي:

1.1. مفهوم توزيع برنولي Bernoulli Distribution:

يستند هذا التوزيع إلى نموذج برنولي (نسبة إلى جيمس برنولي في نهاية القرن 17 م) إذ يستخدم في التجارب ثنائية النتيجة. نقول أن متغير عشوائي X يتبع توزيع برنولي **(BD)** إذا كان يقبل قيميتين فقط هما: X=1 التي تمثل عدد مرات النجاح أو النتيجة التي تتوفر فيها الخاصية المدروسة باحتمال p (احتمال النجاح)، وX=0 والتي تعبر عن ظاهرة الفشل باحتمال q=1−p (احتمال الفشل). ويعبر توزيع برنولي عن تجربة عشوائية تكرر مرة واحدة فقط. يرمز له بالرمز: $\boldsymbol{X \sim B}(1.\boldsymbol{p})$ ويكون التوزيع الاحتمالي بالشكل التالي:

X	0	1	$\sum$
P(X=xi)	q	P	1

2.1. المميزات العددية لتوزيع برنولي:

الأمل الرياضي: $E(X) = \sum x_i . p(x_i) = 0.q + 1.p = p$

التباين: $V(X) = EX^2 - [E(X)]^2 = 0 + p - p = p - p^2 = p(1-p) = pq$

الانحراف المعياري: $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{pq}$

مثال 01:

إذا علمنا أن نسبة النجاح لطلبة السنة الثانية علوم اقتصادية للسنة الماضية 70%. نختار عشوائيا طالبا من هذه الدفعة.

المطلوب:

1. حدد التوزيع الاحتمالي في هذه التجربة؟
2. أحسب المميزات العددية لهذا التوزيع؟

الحل:

1. تحديد التوزيع الاحتمالي في هذه التجربة:

بما أن المتغير العشوائي X يحتمل قيمتين فقط (0.1) أي نجاح أو فشل والتجربة مكررة واحدة فقط فهو يتبع توزيع برنولي أي: $\boldsymbol{X \sim B}(1,0.7)$ ويكون توزيع الاحتمالي على الشكل التالي:

X	0	1	$\sum$
(P(X=xi	0.3	0.7	1

2. حساب المميزات العددية لهذا التوزيع الاحتمالي:

الأمل الرياضي: $E(X) = p = 0.7$

التباين: $V(X) = p.q = (0.7).(0.3) = 0.21$

الانحراف المعياري: $\sigma(X) = \sqrt{0.21} = 0.46$

2- توزيع ذي الحدين (الثنائي):

1.2. مفهوم توزيع ذي الحدين Binomial Distribution:

يستند هذا التوزيع على تجربة برنولي إذا تكررت n مرة ، أي إذا كان احتمال ظهور حدث ما مرة واحدة (احتمال النجاح) هو p، واحتمال عدم ظهور الحدث مرة واحدة (احتمال الفشل) هو q، وتكررت هذه التجربة n مرة فإن حصولنا على x نجاحا يعني بالضرورة حصولنا على n−x فشلا، وبما أن n تجربة مستقلة فإن احتمال حدث حصولنا على x نجاح يتحقق بعدة طرق عددها C_n^x طريقة. وبذلك يكون احتمال حصولنا على x نجاح من بين n تجربة وفق الشكل التالي:

$$p(X = x_i) = C_n^x . p^x . q^{n-x} \quad X = 0.1.2.3 \ldots n$$

ويكون المتغير العشوائي X يتبع توزيع ذي الحدين (الثنائي) **(BND)** ذو المعلمتين p و n كمايلي: $\boldsymbol{X \sim B(n.p)}$

حيث: X عدد مرات النجاح، p: احتمال النجاح في التجربة الواحدة (يبقى ثابت عن تكرار التجربة)، q:احتمال الفشل و n: عدد التجارب.

من بين شروط استخدام التوزيع الاحتمالي الثنائي أن تكون التجربة مكررة عدد محدد من المرات واحتمال النجاح في التجربة ثابث (التجارب مستقلة).

2.2. المميزات العددية لتوزيع ذي الحدين:

الأمل الرياضي: $E(X) = n.p$

التباين: $V(X) = n.p.q$

الانحراف المعياري: $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{npq}$

مثال 02:

اختبرت 6 أجهزة راديو، فإذا كان احتمال أن يكون الجهاز معيبا هو 0.3.

المطلوب:

1. أوجد التوزيع الاحتمالي لعدد الأجهزة المعيبة؟

2. أحسب الأمل الرياضي والانحراف المعياري لهذا التوزيع؟

الحل:

1. إيجاد التوزيع الاحتمالي:

لدينا نتيجتين مختلفتين (احتمال النجاح p=0.3: معيب) و (احتمال الفشل q=0.7: غير معيب)، n=6 وبالتالي فإن التوزيع الاحتمالي هو: توزيع ذي الحدين أي: $\boldsymbol{X}\sim\boldsymbol{B}(6,0.3)$

$$p(X=x_i)=C_n^x.p^x.q^{n-x}=\frac{\text{n!}}{x!\,(n-x)!}.p^x.q^{n-x}\quad X=0.1.2.3\ldots6$$

$$(X=0)=C_6^0.p^0.q^6=\frac{6!}{0!\,(6)!}.0.3^0.0.7^6=0.117$$

$$(X=1)=C_6^1.p^1.q^5=\frac{6!}{1!\,(5)!}.0.3^1.0.7^5=0.303$$

$$(X=2)=C_6^2.p^2.q^4=\frac{6!}{2!\,(4)!}.0.3^2.0.7^4=0.325$$

$$(X=3)=C_6^3.p^3.q^3=\frac{6!}{3!\,(3)!}.0.3^3.0.7^3=0.185$$

$$(X=4)=C_6^4.p^4.q^2=\frac{6!}{4!\,(2)!}.0.3^4.0.7^2=0.058$$

$$(X=5)=C_6^5.p^5.q^1=\frac{6!}{5!\,(1)!}.0.3^5.0.7^1=0.011$$

$$(X=6)=C_6^6.p^6.q^0=\frac{6!}{6!\,(0)!}.0.3^6.0.7^0=0.0007$$

جدول التوزيع الاحتمالي:

X=xi	0	1	2	3	4	5	6	Σ
(P(X=xi	0.117	0.303	0.325	0.185	0.058	0.011	0.0007	1

2. حساب المميزات العددية:

الأمل الرياضي: $E(X)=n.p=6.(0.3)=1.8$

التباين: $V(X)=n.p.q=6(0.3)(0.7)=1.26$

الانحراف المعياري: $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{1.26}=1.12$

3- توزيع بواسون Poisson Distirbution:

1.3- مفهوم توزيع بواسون:

سمي هذا التوزيع نسبة إلى العالم الرياضي والفيزيائي الفرنسي سيميون دونيز بواسون (1781-1840) الذي استخدم هذا القانون سنة 1837 في كتابه بحث في احتمال الأحكام في مجال الجريمة وفي المجال المدني. وعلى غرار توزيع ذي الحدين فإن هذا توزيع بواسون *(PD)* يستخدم في التجارب ثنائية النتيجة، إلا أنه يختص بالأحداث النادرة الوقوع في وحدة قياسية معينة نذكر منها:

- عدد الأخطاء المطبعية في صفحة من صفحات كتاب معين.
- عدد حوادث السيارات خلال أسبوع.
- عدد الحشائش الضارة في المتر مربع في قطعة أرض زراعية.
- عدد القطارات التي تغادر المحطة في الساعة.
- عدد العيوب الموجودة في سلك الهاتف طوله 2 كلم.

يمكن استنتاج دالة التوزيع الاحتمالي لبواسون كنهاية حدية لدالة التوزيع الاحتمالي لذي الحدين، فعندما تتكرر التجربة البرنولية عدة مرات يصبح n كبيرا جدا ويكون احتمال تحقق الظاهرة p صغير جدا، بحيث يبقى جداؤهما n.p مساويا لعدد ثابت هو λ و يعطى الشكل الرياضي لدالة توزيع بواسون كمايلي:

$$p(X = x_i) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^{x_i}}{x!} \qquad x = 0.1.2 \dots \dots$$

حيث e أساس اللوغاريتم الطبيعي (مقدار ثابت)=2.713، λ متوسط عدد مرات وقوع الأحداث في وحدة قياس معينة حيث $\lambda > 0$. وإذا كان X متغير عشوائي يتبع توزيع بواسون يمكن كتابته كمايلي: $\boldsymbol{X \sim p}(\lambda)$.

2.3. المميزات العددية لتوزيع بواسون:

الأمل الرياضي: $E(X) = \lambda$

التباين: $V(X) = \lambda$

الانحراف المعياري: $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\lambda}$

مثال 03:

يبلغ متوسط عدد حوادث العمل التي تحدث في مصنع ما أربع حوادث خلال الشهر.

المطلوب:

1. أحسب احتمال أن لا يقع أي حادث في الشهر؟

2. أحسب احتمال أن يقع ثلاث حوادث على الأكثر في الشهر؟

3. أحسب المميزات العددية لهذا التوزيع؟

الحل:

لدينا متوسط عدد مرات وقوع حوادث العمل في هذا المصنع والتي قدرت بأربع حوادث شهريا، أي أن المتوسط ينتمي إلى وحدة قياس الزمن، وأننا أمام ظاهرة ثنائية النجاح فيها هو وقوع الحادث، وبالتالي فالتوزيع الاحتمالي هو توزيع بواسون: $\lambda = 4$ $\boldsymbol{X \sim p}(\lambda)$.

$$p(X = x_i) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^{x_i}}{x!} \qquad x = 0.1.2 \ldots \ldots$$

1. حساب احتمال أن لا يقع أي حادث خلال الشهر:

$$p(X = 0) = \frac{e^{-4}.4^0}{0!} = 0.0183$$

2. حساب احتمال أن يقع ثلاثة حوادث على الأكثر خلال الشهر:

$$p(X \leq 3) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3) = \frac{e^{-4}.4^0}{0!} + \frac{e^{-4}.4^1}{1!} + \frac{e^{-4}.4^2}{2!} + \frac{e^{-4}.4^3}{3!}$$
$$= 0.0183 + 0.0732 + 0.1464 + 0.1952 = 0.4331$$

3. حساب المميزات العددية:

الأمل الرياضي: $E(X) = \lambda = 4$

التباين: $V(X) = \lambda = 4$

الانحراف المعياري: $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{4} = 2$