# الفصل الثاني: التوزيع الهندسي وفوق الهندسي.

## 1- التوزيع الهندسي Geometric Distribution:

### 1.1- مفهوم التوزيع الهندسي:

التوزيع الهندسي *(GD)* هو جزء من التوزيع الاحتمالي المتعلق بتجارب برنولي، وهو تكرار التجربة حتى الحصول على نجاح واحد فقط من تلك التجربة، فإذا كان المتغير العشوائي X يشير إلى عدد مرات تكرار التجربة وp يشير إلى احتمال النجاح، q هو احتمال فشل التجربة، فإن التوزيع الاحتمالي المدروس يتبع التوزيع الهندسي، ويمكن كتابته كمايلي:

$$X\sim g(p),\quad p(X=x_i)=p.q^{x-1},\quad X=1.2.3\ ....$$

حيث أن X هوعدد المحاولات دون توقف حتى الحصول على أول نجاح، وقد سمي بالتوزيع الهندسي لأن الاحتمالات الموافقة لقيم المتغير العشوائي $X$ توافق حدود متتالية هندسية. من شروط هذا التوزيع أن تكون التجارب مستقلة، واحتمالات الفشل ثابتة.

### 1-2- المميزات العددية للتوزيع الهندسي:

**الأمل الرياضي:** $E(X)=\frac{1}{p}$

**التباين:** $V(X)=\frac{q}{p^2}\ =\ \frac{1-p}{p^2}$

**الانحراف المعياري:** $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}\ =\sqrt{\frac{1-p}{p^2}}$

**مثال 04:**

في تجربة إلقاء قطعة نقدية، نرمي القطعة حتى يتم ظهور الصورة.

**المطلوب:**

1. ما هو احتمال ظهور الصورة في الرمية الخامسة؟
2. أحسب الأمل الرياضي، التباين والانحراف المعياري؟

**الحل:**

تم رمي القطعة النقدية عدة مرات والمراد الحصول على الصورة (خاصية النجاح). احتمال النجاح هو: p=1/2، احتمال الفشل هو: q=1/2.

$$X\sim g(p),\qquad X\sim g\left(\frac{1}{2}\right), X=5,\ \ p(X=x_i)=p.q^{x-1},\ \ p(X=5)=p(ppppf)$$

1. حساب احتمال ظهور الصورة في الرمية الخامسة:

$$p(X = x_i) = p.q^{x-1} = (\frac{1}{2}).\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0.0312$$

2. حساب الأمل الرياضي، التباين والانحراف المعياري:

**الأمل الرياضي:** $E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

**التباين:** $V(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}^2} = 2$

**الانحراف المعياري:** $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2} = 1.41$

## 2- التوزيع فوق الهندسي:

### 2-1- مفهوم التوزيع فوق الهندسي Hypergeometric Distribution:

تشبه أنواع تطبيقات التوزيع فوق الهندسي لأنواع تطبيقات توزيع ذي الحدين، حيث في كلا الحالتين نهتم بحساب احتمال وقوع عدد معين من المشاهدات ضمن فئة محددة. ولكن في حالة توزيع ذي الحدين فإن الاستقلالية بين التجارب مطلوبة مع ثبات احتمال النجاح، ونتيجة لذلك عندما نطبق هذا التوزيع وجب علينا السحب مع الإعادة. لكن هناك بعض الحالات لا يمكن أن يتم فيها السحب مع الإعادة، وهنا يختل شرطا تطبيق توزيع ذو الحدين (استقلالية التجارب وثبات احتمال النجاح) فنلجأ في هذه الحالة إلى تطبيق التوزيع الاحتمالي فوق الهندسي (**HGD**).

عمليا قانون فوق الهندسي يعني إجراء دراسة إحصائية على عينة n بشرط أن يتم السحب بدون إرجاع، وبالتالي يبقى احتمال النجاح غير ثابت. نقول عن متغير عشوائي X أنه يتبع توزيع فوق هندسي، حيث يمثل X عدد حالات النجاح في عينة n تم اختيارها من مجتمع مكون من N عنصر من بينها N1 عنصر مصنفة على أنها ناجحة، وN−N1 مصنفة على أنها فاشلة، والذي يهتم ثلاثة معالم هي: n، N، N1 وبالتالي يمكن كتابته على الشكل التالي: $X{\sim}H(N, N1, n)$، ويعطى شكل دالة التوزيع الاحتمالي لهذا التوزيع وفق الصيغة الرياضية التالية:

$$P(X = x_i) = \frac{C_{N_1}^{x} \cdot C_{\mathrm{N-N_1}}^{n-x}}{C_N^n} X = 0,1,2,3, \dots, n$$

### 2-2- المميزات العددية للتوزيع فوق الهندسي:

**الأمل الرياضي:** $E(X) = n.p$

**التباين:** $V(X) = n.p.q(\frac{N-n}{N-1})$

**الانحراف المعياري:** $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{npq(\frac{N-n}{N-1})}$

**مثال 05:**

تتكون هيئة التدريس في أحد فروع الجامعة من أربعة كيميائيين وسبعة فيزيائيين، سحبنا عشوائيا لجنة مؤلفة من أربعة أساتذة. لنفرض أن المتغير العشوائي x يمثل عدد الكيميائيين في هذه اللجنة.

المطلوب:

1. حدد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X؟
2. أحسب المميزات العددية لهذا التوزيع؟

**الحل:**

من خلال المعطيات نلاحظ أن التجربة ثنائية النتيجة فالأستاذ إما أن يكون كيميائيا أو فيزيائيا، والسحب تم بدون إرجاع كما أن الترتيب غير مهم، بحث لا يمكن سحب الأستاذ ثم إرجاعه وعلى ضوء هذا يمكن إخلال شرط تطبيق التوزيع الثنائي، وبالتالي فإن X يتبع توزيع فوق الهندسي أي: $X \sim H(N, N1, n)$

$$X \sim H(11, 4, 4)$$

1. تحديد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X :

$$P(X = x_i) = \frac{C_{N_1}^{x} \cdot C_{\mathrm{N}-\mathrm{N}_1}^{n-x}}{C_N^n} \qquad X = 0,1,2,3,4$$

$$P(X = 0) = \frac{C_4^0 \cdot C_7^4}{C_{11}^4} = 0.106$$

$$P(X = 1) = \frac{C_4^1 \cdot C_7^3}{C_{11}^4} = 0.424$$

$$P(X = 2) = \frac{C_4^2 \cdot C_7^2}{C_{11}^4} = 0.380$$

$$P(X = 3) = \frac{C_4^3 \cdot C_7^1}{C_{11}^4} = 0.085$$

$$P(X = 4) = \frac{C_4^4 \cdot C_7^0}{C_{11}^4} = 0.003$$

**جدول التوزيع الاحتمالي**

| X=xi | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (P(X=xi | 0.106 | 0.424 | 0.380 | 0.085 | 0.03 | 1 |

2. حساب المميزات العددية:

**الأمل الرياضي:** $E(X) = n.p = 4.\left(\frac{4}{11}\right) = 1.45$

**التباين:** $V(X) = n.p.q\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = 4.(\frac{4}{11})(\frac{7}{11})(\frac{11-4}{11-1}) \;= 0.647$

**الانحراف المعياري:** $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.647} \;= 0.804$