Relativité et Gravitation

Dr.Hana BENZAGHOU

Université Saad Dahleb Blida1

Faculté des Sciences

Département de Physique

Email : hanabenzaghou@gmail.com

5.0 Décembre 2023

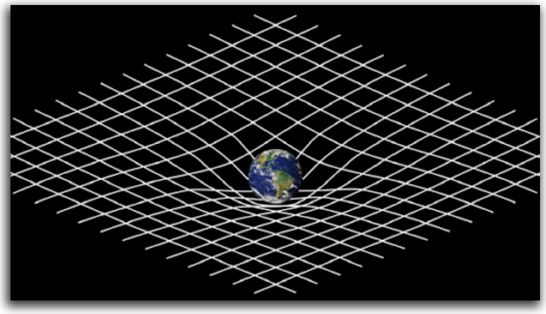


Table des matières

Objectifs

Ce cours offre une introduction détaillée à la théorie classique de la relativité générale à partir des premiers principes. La relativité générale est une partie cruciale de la physique moderne, Cosmologie et astrophysique relativiste. Les objectifs du cours se résument dans les points suivants :

- Identifier les postulats de base de la relativité restreinte et générale.
- Rappeler les concepts de la relativité galiléenne et leurs limitations.
- Expliquer les conséquences des transformations de Lorentz sur les concepts de temps et d'espace.
- Décrire l'impact de la gravitation sur la courbure de l'espace-temps selon la relativité générale.
- Appliquer les transformations de Lorentz pour résoudre des problèmes de dilatation du temps et de contraction des longueurs.
- Utiliser les équations de la relativité restreinte pour calculer l'énergie et la quantité de mouvement des particules relativistes.
- Analyser les différences entre les référentiels inertiels et non-inertiels en relativité restreinte et générale.
- Comparer les effets relativistes observables dans différents contextes astrophysiques.
- Évaluer la validité des théories de la relativité à travers des expériences pensées et des simulations.
- Critiquer les interprétations classiques des concepts de temps et d'espace à la lumière de la relativité.
- Concevoir une simulation numérique pour démontrer un effet relativiste spécifique.
- Élaborer un modèle théorique illustrant l'effet de la gravitation sur un système astrophysique complexe.

Chapitre 1 : Relativite Galileenne

La relativité galiléenne, développée par Galileo Galilei au XVIIe siècle, est une théorie fondamentale en physique classique qui traite de la manière dont le mouvement est perçu dans différents référentiels inertiels, c'est-à-dire des référentiels en mouvement rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.

1. Référentiel

Définition

Un référentiel est un point de repère (système d'axe) par rapport au quel on peut prendre une mesure de position et de temps. Il est préférable d'utiliser une graduation commune pour tous les référentiels utilisés dans une situation.

Exemple

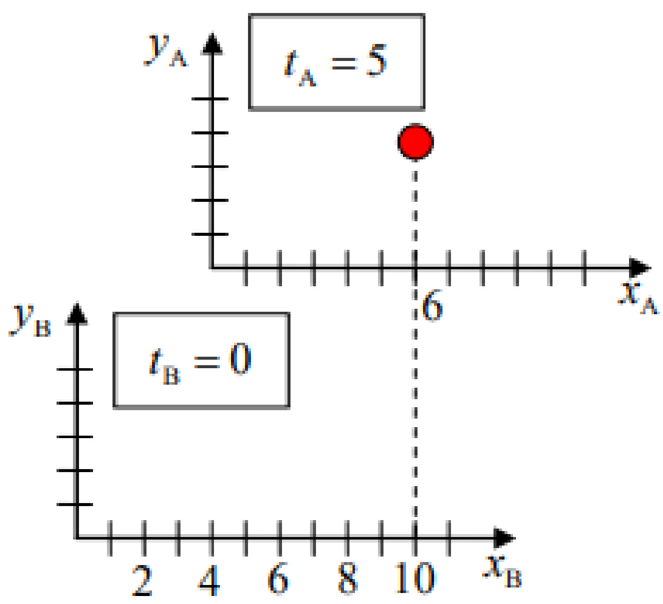
Évaluer la position horizontale d'une balle rouge dans le référentiels A et dans le référentiel B.

Selon le référentiel A :

$x_A = 6$ à $t_A = 5$

Selon le référentiel B :

$x_B = 10$ à $t_B = 0$



Position d'une balle rouge exprimée dans un référentiel **A** et **B**.

Referentiel

Les deux référentiels ont des valeurs de x et de t différentes, mais ils s'accordent sur le fait qu'ils positionnent le même objet au même instant

2. Événement

Définition

Un événement est une observation d'un phénomène à une position x donnée et à un temps t donné. La description de l'événement et la valeur de ses mesures dépendent du choix du référentiel

Exemple

- Albert est en bas de la tour (x) à 2h a.m. (t). (1 évé.)
- Albert monte la tour de 100 m (Δx) en 15 minutes (Δt). (2 évé.)

Événement

3. La longueur

Définition

La longueur est une variation de position entre deux événements mesurés simultanément mesurée à partir d'un même référentiel :

$$L = \Delta x = x_2 - x_1 \quad \text{lorsque} \quad \Delta t = 0$$

où L : Longueur entre les deux événements par rapport à un référentiel (m)
x_2 : Position de l'événement 2 par rapport au référentiel (m)
x_1 : Position de l'événement 1 par rapport au référentiel (m)

4. La distance

Définition

La distance est une variation de position entre deux événements non simultanés mesurée à partir d'un même référentiel :

$$D = \Delta x(t) = x_2(t_2) - x_1(t_1) \quad \text{lorsque} \quad \Delta t \neq 0$$

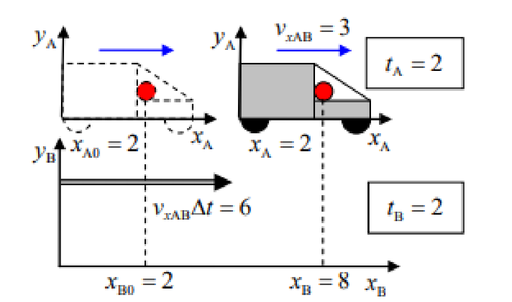
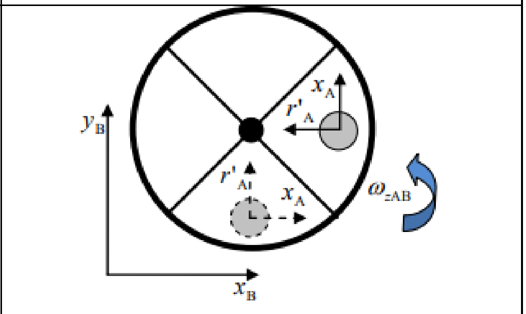
où D : Distance entre les deux événements par rapport à un référentiel (m)
$x_2(t_2)$: Position de l'événement 2 par rapport au référentiel (m)
$x_1(t_1)$: Position de l'événement 1 par rapport au référentiel (m)

5. Référentiel inertiel et non inertiel

Définition

Un référentiel inertiel est un référentiel où la 1ière loi de Newton est applicable (∑ F = 0 ⇔ v est constant). Ce référentiel est immobile ou se déplace à vitesse constante par rapport à un autre référentiel inertiel.

Un référentiel non inertiel est un référentiel où la 1ière loi de Newton est en violation. Ce type de référentiel subit alors une accélération par rapport à un autre référentiel inertiel.

Référentiel inertiel	Référentiel non inertiel
Une voiture (**A**) se déplace à une vitesse constante $v_{xAB} = 3$ par rapport au sol (**B**).	Un tourniquet (**A**) tourne à une vitesse angulaire constante ω_{zAB} par rapport au sol (**B**).
	

Ref inertiel et non inertiel

6. Ttransformation entre deux référentiels

Définition

Une transformation entre deux référentiels est une équation mathématique permettant de faire correspondre une mesure effectuée dans un référentiel A avec une mesure effectuée dans un référentiel B. Cette transformation relie mathématiquement un événement mesuré dans deux contextes différents.

Une transformation s'utilise de la façon suivante :

Si l'on mesure un événement dans le référentiel A et que l'on connaît la transformation pour passer à un référentiel B, on peut calculer la mesure de l'événement dans le référentiel de B

Transformation

Une transformation est une « traduction » d'une mesure d'un référentiel à un autre

7. La transformation de Galilée

Définition

La transformation de Galilée permet de convertir des mesures (x, vx, t) d'un référentiel inertiel A vers un référentiel inertiel B qui ont les caractéristiques suivantes :

1) Le référentiel A se déplace à une vitesse relative v_{xAB} par rapport au référentiel B.

2) L'origine du référentiel A coïncide avec l'origine du référentiel B à tA = tB = 0 .

Transformation de **A** vers **B**	Transformation de **B** vers **A**
• $x_B = x_A + v_{xAB} t_A$ • $v_{xB} = v_{xA} + v_{xAB}$ • $y_B = y_A$ • $t_B = t_A$	• $x_A = x_B - v_{xAB} t_B$ • $v_{xA} = v_{xB} - v_{xAB}$ • $y_A = y_B$ • $t_A = t_B$

Transformation de Galilee

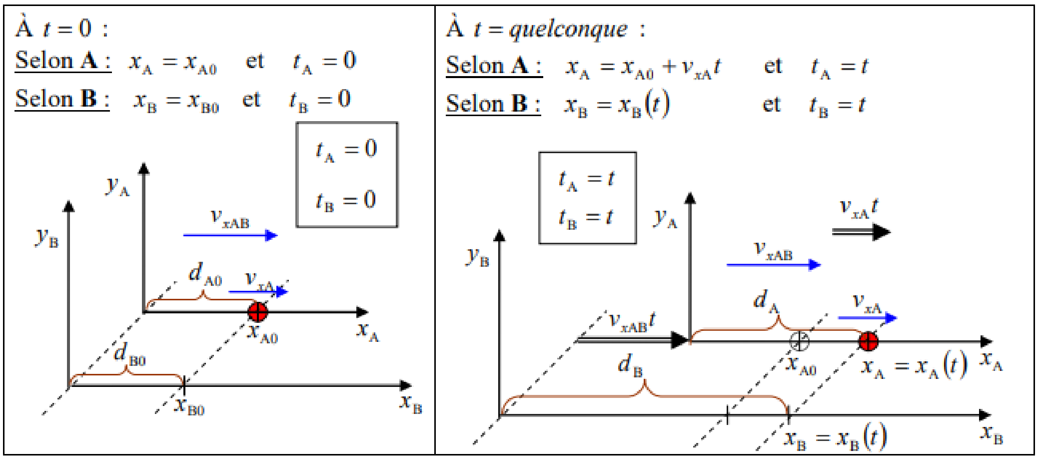
où x_A : Position horizontale d'un événement selon le référentiel **A** (m).
x_B : Position horizontale d'un événement selon le référentiel **B** (m).
v_{xA} : Vitesse d'un événement selon le référentiel **A** (s).
v_{xB} : Vitesse d'un événement selon le référentiel **B** (s).
y_A : Position verticale d'un événement selon le référentiel **A** (m).
y_B : Position verticale d'un événement selon le référentiel **B** (m).
t_A : Moment (temps) d'un événement selon le référentiel **A** (s).
t_B : Moment (temps) d'un événement selon le référentiel **A** (s).
v_{xAB} : Vitesse du référentiel A par rapport au référentiel **B** (m/s).

P.S. Le signe associé de la vitesse xAB v est très important, car il précise le sens de la vitesse.

- Référentiel A se déplace dans le sens positif de l'axe x par rapport à B, alors vxAB > 0 .
- Référentiel A se déplace dans le sens négatif de l'axe x par rapport à B, alors vxAB < 0 .

Preuve :

Considérons un objet situé initialement à la coordonnée $\mathbf{x_{A0}}$ et se déplaçant à vitesse constante $\mathbf{v_{xA}}$ selon un référentiel inertiel **A** étant lui-même en mouvement à vitesse constante $\mathbf{v_{xAB}}$ par rapport à un référentiel B inertiel. Évaluons la transformation de la position du référentiel **A** vers **B** sachant que les deux référentiels sont identiques à $t_A = t_B = 0$ et qu'il s'est écouler un temps t dans le référentiel **A** et **B** :



Preuve

Par un simple ajout de translation $v_{xAB}t$ du référentiel A par rapport à B, nous obtenons la transformation de Galilée de la position :

$x_B = x_A + v_{xAB}t$ (1)

Évaluons la vitesse de l'objet dans le référentiel B à partir de la transformation de Galilée de la position :

$$x_B = x_A + v_{xAB}t \quad \Rightarrow \quad x_B = (x_{A0} + v_{xA}t) + v_{xAB}t \qquad (\text{MUA} : x_A = x_{A0} + v_{xA}t,\ a_{xA} = 0)$$

$$\Rightarrow \quad x_B = x_{A0} + (v_{xA} + v_{xAB})t \qquad (\text{Factoriser } t)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(x_B) = \frac{d}{dt}\left(x_{A0} + (v_{xA} + v_{xAB})t\right) \qquad (\text{Dériver par rapport au temps } t)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx_B}{dt} = (v_{xA} + v_{xAB})\frac{dt}{dt} \qquad (v_{xA},\ v_{xAB} \text{ et } x_{A0} \text{ sont des constantes})$$

$$\Rightarrow \quad v_{xB} = v_{xA} + v_{xAB} \quad \blacksquare \ (2) \qquad \left(\frac{dx_B}{dt} = v_{xB} \text{ et } \frac{dt}{dt} = 1\right)$$

Situation A : *Du bowling dans le train.* Durant un voyage, Albert joue une partie de bowling dans un train se déplaçant à 30 m/s (108 km/h) par rapport au sol. À $t = 0$, la boule est située $x_A = 0$ pour Albert et à $x_B = 0$ pour le sol et elle roule à une vitesse de 1,2 m/s par rapport à Albert. On désire évaluer **(a)** la position de la boule par rapport à Albert à 5 secondes et **(b)** la position de la boule par rapport au sol à 5 secondes (avec la transformation de Galilée), **(c)** la vitesse de la boule par rapport au sol et **(d)** la position de la boule par rapport au sol à 5 secondes (avec la résolution du MUA dans le référentiel au sol).

Dans ce problème, nous avons deux référentiels :

Référentiel A : Le train.

Référentiel B : Le sol.

Utilisons les équations du MUA pour positionner la boule dans le référentiel A :

$$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad \Rightarrow \quad x_A = x_{A0} + v_{xA0}t_A + \frac{1}{2}a_{xA}t_A{}^2 \qquad (\text{Appliquer l'équation dans le réf. } \mathbf{A})$$

$$\Rightarrow \quad x_A = (0) + (1{,}2)(5) + \frac{1}{2}(0)(5)^2 \qquad (\text{Remplacer valeurs numériques})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x_A = 6 \text{ m}} \qquad \mathbf{(a)}$$

Avec la transformation de Galilée, transposons notre mesure effectuée dans le référentiel A vers le référentiel B :

Avec : $x_A = 6 \text{ m}$ à $t_A = 5 \text{ s}$, $v_{xAB} = 30 \text{ m/s}$

$$x_B = x_A + v_{xAB} t_A \quad \Rightarrow \quad x_B = (6) + (30)(5) \qquad \text{(Remplacer } x_A, t_A \text{ et } v_{xAB}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x_B = 156 \text{ m}} \qquad \textbf{(b)}$$

Utilisons la transformation de Galilée des vitesses afin de transformer la vitesse de la boule mesurée par Albert (référentiel A) vers le référentiel du sol (référentiel B) :

$$v_{xB} = v_{xA} + v_{xAB} \quad \Rightarrow \quad v_{xB} = (1{,}2) + (30) \qquad \text{(Remplacer valeur num.)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_{xB} = 31{,}2 \text{ m/s}} \qquad \textbf{(c)}$$

À partir de la vitesse de la boule xB v par rapport au référentiel B, évaluons la position de la boule par rapport au référentiel B :

$$x = x_0 + v_{x0} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \quad \Rightarrow \quad x_B = x_{B0} + v_{xB0} t_B + \frac{1}{2} a_{xB} t_B^{\,2} \qquad \text{Appliquer l'équation dans le réf. } \textbf{B}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad x_B = (0) + (31{,}2)(5) + \frac{1}{2}(0)(5)^2 \qquad \text{(Remplacer valeurs num.)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x_B = 156 \text{ m}} \qquad \textbf{(d)}$$

On remarque que la coordonnée Bx calculée en (b) par transformation de Galilée est identique la celle calculée en (d) par résolution de la cinématique dans le référentiel B.

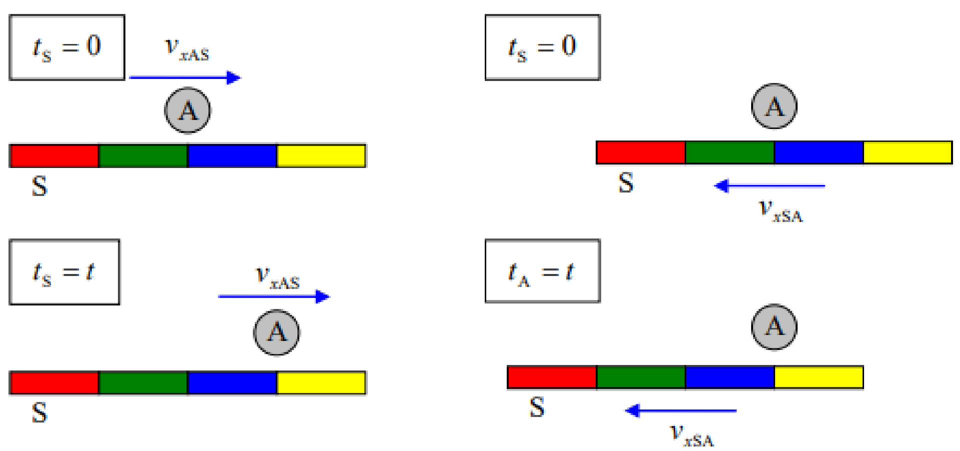
8. La relativité des vitesses

Définition

La vitesse v_{xAS} d'un objet A par rapport à un référentiel S fait référence à deux référentiels (l'objet lui-même A et le référentiel qui observe l'objet en mouvement S). Si l'on mesure la vitesse v_{xAA} de l'objet A par rapport à son propre référentiel A, alors l'objet est toujours immobile ($v_{xAA} = 0$). Du point de vue du référentiel A, l'objet A est immobile et le référentiel S est en mouvement et vis versa. Chaque référentiel affirme que l'autre référentiel est en mouvement tel qu'illustré ci-gauche

Vitesse de la balle par rapport au sol : v_{xAS} : Vitesse de **A** par rapport à **S**

Vitesse du sol par rapport à la balle : v_{xSA} : Vitesse de **S** par rapport à **A**



La relation mathématique existant entre deux vitesses relatives v_{xAS} et v_{xSA} est la suivante :

$$v_{xAS} = -v_{xSA}$$

où v_{xAS} : Vitesse de A par rapport à S (m/s)
v_{xSA} : Vitesse de S par rapport à A (m/s)

La relation mathématique existant entre deux vitesses relatives v_{xAS} et v_{xSA} est la suivante :

$$v_{xAS} = -v_{xSA}$$

où v_{xAS} : Vitesse de A par rapport à S (m/s)
v_{xSA} : Vitesse de S par rapport à A (m/s)

9. L'addition Galiléenne des vitesses relatives

Définition

À partir de la transformation des vitesses de Galilée et de la notion de vitesse relative, nous pouvons définir la règle suivante pour additionner des vitesses

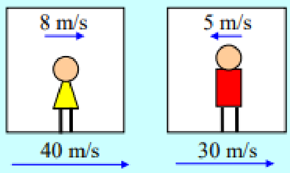
relatives :

$$v_{xAR} = v_{xAB} + v_{xBR}$$

où v_{xAR} : Vitesse selon l'axe x de **A** par rapport à **R** (m/s).
v_{xAB} : Vitesse selon l'axe x de **A** par rapport à **B** (m/s).
v_{xBR} : Vitesse selon l'axe x de **B** par rapport à **R** (m/s).

Lancer un javelot en courant permet à celui-ci d'avoir une plus grande vitesse par rapport au sol avant d'être lancé.

Situation B : ***La courte retrouvaille.*** Béatrice ne pouvant plus attendre son Albert, elle décide de prendre le prochain train allant dans la même direction qu'Albert. Le train d'Albert se déplace à 30 m/s (108 km/h) et le train de Béatrice se déplace à 40 m/s (144 km/h). Tout juste avant de croiser son regard, Béatrice court vers Albert à une vitesse de 8 m/s par rapport à son train et Albert court vers Béatrice à une vitesse de 5 m/s par rapport à son train. On désire évaluer la vitesse d'Albert par rapport à Béatrice.



Dans ce problème, nous pouvons utiliser 5 référentiels différents :

Référentiel 1	Béatrice
Référentiel 2	Le train de Béatrice
Référentiel 3	Le sol
Référentiel 4	Le train d'Albert
Référentiel 5	Albert

Dans le problème, nous avons les informations suivantes :

1) Vitesse de Albert par rapport à son train : $v_{x54} = -5$ m/s

2) Vitesse du train de Albert par rapport au sol : $v_{x43} = 30$ m/s

3) Vitesse du train de Béatrice par rapport au sol : $v_{x23} = 40$ m/s

4) Vitesse de Béatrice par rapport à son train : $v_{x12} = 8$ m/s

Pour évaluer la vitesse de Albert (5) par rapport à Béatrice (1), il faut évaluer la vitesse relative v_{x51} .

Voici une série de transformations nous permettant d'évaluer la vitesse relative v_{x51} :

1) $v_{x53}=v_{x54}+v_{x43}$

2) $v_{x52}=v_{x53}+v_{x32}$

3) $v_{x51}={}_{x52}+v_{x21}$

En combinant ces trois transformations, nous obtenons l'expression simplifiée suivante :

$$
\begin{aligned}
v_{x51} = v_{x54} + v_{x43} + v_{x32} + v_{x21} \quad &\Rightarrow \quad v_{x51} = (-5) + (30) + v_{x32} + v_{x21} && \text{(Remplacer valeurs connues)} \\
&\Rightarrow \quad v_{x51} = 25 + (-v_{x23}) + (-v_{x12}) && \text{(Utiliser } v_{xAS} = -v_{xSA}\text{)} \\
&\Rightarrow \quad v_{x51} = 25 - (40) - (8) && \text{(Remplacer autres valeurs)} \\
&\Rightarrow \quad \boxed{v_{x51} = -23 \text{ m/s}}
\end{aligned}
$$

10. Les invariants de Galilée

Définition

Un invariant est une mesure dont la valeur numérique est identique pour deux référentiels. Cela signifie que si l'on mesure deux événements dans un référentiel inertiel A et que l'on applique la transformation de Galilée pour transformer les mesures des deux événements vers un autre référentiel B, calculer l'expression de l'invariant donnera la même valeur numérique pour le référentiel A et B.

Voici quelques invariants selon la transformation de Galilée :

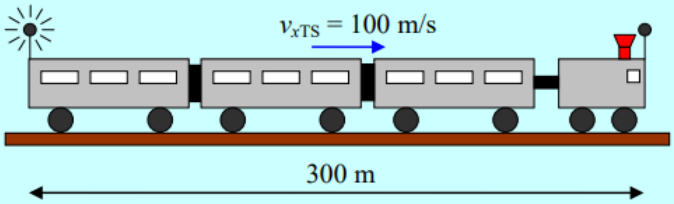
Le module de la vitesse relative entre les référentielles **A** et **B**	$\lvert v_{x\mathrm{AB}} \rvert = \lvert v_{x\mathrm{BA}} \rvert$
La durée	$T_{\mathrm{B}} = T_{\mathrm{A}}$
La longueur	$L_{\mathrm{B}} = L_{\mathrm{A}}$
La composante selon l'axe *x* d'une force	$F_{x\mathrm{B}} = F_{x\mathrm{A}}$

11. La causalité et la transformation de Galilée

Rappel

La transformation de Galilée permet une propagation de la causalité à des vitesses qui dépendent du choix du référentiel. Selon la transformation de Galilée, les longueurs et les durées sont mesurées avec des valeurs identiques dans tous les référentiels (invariantes sous une transformation de Galilée). Ainsi, la vitesse d'un signal dépend du choix de l'observateur.

Situation C : ***Le signal radio.*** Un train super rapide (référentiel **T**) de 300 m de longueur se déplaçant à 100 m/s par rapport au sol (référentiel **S**) possède deux antennes radio à ses deux extrémités. L'antenne arrière émet le signal radio à 3×10^{8} m/s (par rapport à l'antenne) et l'antenne avant reçoit le signal. On désire évaluer la vitesse du signal radio par rapport au sol sans utiliser la transformation des vitesses de Galilée.



Évaluons le temps du voyage du signal radio selon le référentiel du train T :

$$\Delta x_{\mathrm{T}} = v\Delta t_{\mathrm{T}} \quad \Rightarrow \quad (300) = (3\times10^{8})\Delta t_{\mathrm{T}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta t_{\mathrm{T}} = 1\ \mu\mathrm{s}}$$

Évaluons la position où sera capté le signal radio par rapport au sol S à partir de la transformation de Galilée de la position :

$$x_{\mathrm{S}} = x_{\mathrm{T}} + v_{x\mathrm{TS}}t_{\mathrm{T}} \quad \Rightarrow \quad x_{\mathrm{S}} = (300) + (100)(1\times10^{-6}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_{\mathrm{S}} = 300{,}0001\ \mathrm{m}}$$

Évaluons la vitesse du signal radio par rapport au sol S. Il est important de rappeler que le temps du voyage signal radio est le même dans les deux référentiels

($\Delta t_S = \Delta t_T$) selon la transformée de Galilée du temps :

$$\Delta x_{\mathrm{S}} = v\Delta t_{\mathrm{S}} \quad \Rightarrow \quad (x_{\mathrm{S}}) = v(\Delta t_{\mathrm{T}}) \qquad \text{(Remplacer } \Delta x_{\mathrm{S}} = x_{\mathrm{S}},\ \Delta t_{\mathrm{S}} = \Delta t_{\mathrm{T}}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad (300{,}0001) = v(1\times10^{-6}) \qquad \text{(Remplacer valeurs numériques)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v = 300\ 000\ 100\ \mathrm{m/s}} \qquad \text{(Évaluer la vitesse du signal radio)}$$

- La vitesse du signal radio par rapport au sol S respect la transformation des vitesses de Galilée ($v_{xS}=v_{xTS} + v_{xT}$ tel que m/s v_{xT} = 300000 et v_{xTS} =100 m/s).
- Nous réaliserons dans la suite que le raisonnement précédent basé sur les transformations de Galilée ne s'applique pas aux objets se déplaçant à grande vitesse comme la lumière. Ainsi, la transformation de Galilée n'est valide qu'à basse vitesse.

12. Résumé

Vitesse relative $v_{x\mathrm{AB}}$ du référentiel **A** par rapport au référentiel **B**	
Transformation de la position/déplacement selon l'axe x	$x_\mathrm{B} = x_\mathrm{A} + v_{x\mathrm{AB}} t_\mathrm{A}$ $\Delta x_\mathrm{B} = \Delta x_\mathrm{A} + v_{x\mathrm{AB}} \Delta t_\mathrm{A}$
Transformation de la position/déplacement selon l'axe y	$y_\mathrm{B} = y_\mathrm{A}$ $\Delta y_\mathrm{B} = \Delta y_\mathrm{A}$
Transformation du temps/durée	$t_\mathrm{B} = t_\mathrm{A}$ $\Delta t_\mathrm{B} = \Delta t_\mathrm{A}$
Transformation de la vitesse selon l'axe x	$v_{x\mathrm{B}} = v_{x\mathrm{A}} + v_{x\mathrm{AB}}$
Transformation de la vitesse selon l'axe y	$v_{y\mathrm{B}} = v_{y\mathrm{A}}$
Les invariants entre le référentiel **A** et **B**	
Le module de la vitesse relative entre les référentielles **A** et **B**	$\lvert v_{x\mathrm{AB}} \rvert = \lvert v_{x\mathrm{BA}} \rvert$
La longueur	$L_\mathrm{B} = L_\mathrm{A}$
La composante selon l'axe x d'une force	$F_{x\mathrm{B}} = F_{x\mathrm{A}}$
La composante selon l'axe y d'une force	$F_{y\mathrm{B}} = F_{y\mathrm{A}}$