

# Relativité et Gravitation

Dr.Hana BENZAGHOU

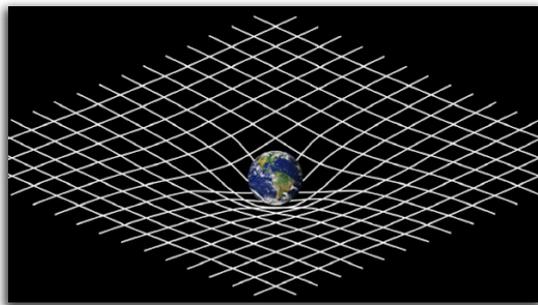
Université Saad Dahleb Blida1

Faculté des Sciences

Département de Physique

Email : [hanabenzaghoul@gmail.com](mailto:hanabenzaghoul@gmail.com)

5.0 Décembre 2023

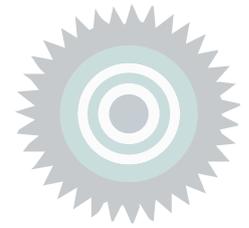


# Table des matières

<b>Objectifs</b>	<b>3</b>
<b>I - Chapitre2 : La relativité restreinte</b>	<b>4</b>
1. L'invariance de la vitesse .....	4
1.1. La vitesse de la lumière et l'électromagnétisme .....	4
2. L'éther.....	5
3. L'interféromètre de Michelson-Morley.....	5
4. Le conflit entre Galilée et l'électromagnétisme .....	6
5. La transformation particulière de l'électromagnétisme.....	6
6. Albert Einstein et les deux postulats de la relativité .....	7
7. La vitesse de la lumière et deux objets en mouvement.....	8
8. La dilatation du temps.....	9
8.1. Nos deux vaisseaux de l'espace .....	9
8.2. Le croisement des deux vaisseaux .....	9
8.3. Comparaisons des intervalles de temps et des distances.....	14
8.4. Intervalle de temps propre .....	14
8.5. Dilatation du temps (transformation du temps propre).....	14

# Objectifs

---



Ce cours offre une introduction détaillée à la théorie classique de la relativité générale à partir des premiers principes. La relativité générale est une partie cruciale de la physique moderne, Cosmologie et astrophysique relativiste. Les objectifs du cours se résument dans les points suivants :

- Identifier les postulats de base de la relativité restreinte et générale.
- Rappeler les concepts de la relativité galiléenne et leurs limitations.
- Expliquer les conséquences des transformations de Lorentz sur les concepts de temps et d'espace.
- Décrire l'impact de la gravitation sur la courbure de l'espace-temps selon la relativité générale.
- Appliquer les transformations de Lorentz pour résoudre des problèmes de dilatation du temps et de contraction des longueurs.
- Utiliser les équations de la relativité restreinte pour calculer l'énergie et la quantité de mouvement des particules relativistes.
- Analyser les différences entre les référentiels inertiels et non-inertiels en relativité restreinte et générale.
- Comparer les effets relativistes observables dans différents contextes astrophysiques.
- Évaluer la validité des théories de la relativité à travers des expériences pensées et des simulations.
- Critiquer les interprétations classiques des concepts de temps et d'espace à la lumière de la relativité.
- Concevoir une simulation numérique pour démontrer un effet relativiste spécifique.
- Élaborer un modèle théorique illustrant l'effet de la gravitation sur un système astrophysique complexe.

# Chapitre 2 : La relativité restreinte



## 1. L'invariance de la vitesse

### 1.1. La vitesse de la lumière et l'électromagnétisme

En 1873, James Clerk Maxwell publia une synthèse des différentes lois de l'électromagnétisme :

- L'électrostatique
- Le magnétisme
- L'induction électrique
- L'induction magnétique

Cette synthèse a pris la forme de quatre équations faisant intervenir le concept de champ électrique  $\vec{E}$ , champ magnétique  $\vec{B}$ , densité de charge électrique  $\rho$  et de densité de courant électrique  $\vec{J}$ . Maxwell a également introduit le concept de « courant de déplacement » afin d'unifier le tout :

Équations de Maxwell	Avec charge et courant
Théorème de Gauss	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
Sans nom	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
Loi de Faraday	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Théorème d'Ampère	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Ces quatre équations ont permis d'évaluer théoriquement la vitesse de la lumière :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

Malgré ce résultat fort intéressant, plusieurs questions demeuraient en suspens :

- Quel est le milieu de propagation de la lumière ?
- Est-ce que la vitesse de la lumière varie d'un référentiel à l'autre ?
- Est-ce que la lumière peut être transportée par un « vent » ?

## 2. L'éther

Afin d'expliquer la propagation de la lumière, les physiciens de la fin du 19<sup>ième</sup> siècle croyaient qu'il était nécessaire de mieux comprendre le milieu de propagation de la lumière, car la lumière était une onde et qu'une onde devrait nécessairement posséder un milieu pour se propager. C'est pour cette raison que « l'éther » était au cœur de toutes ces discussions.

Selon eux, la vitesse de la lumière  $c$  obtenue à partir des équations de Maxwell était celle mesurée par rapport à l'éther (milieu de propagation de la lumière) et tout objet en mouvement par rapport à l'éther devait mesurer une vitesse de la lumière différente de  $c$ .

L'éther était un milieu très spécial ayant des contradictions :

- L'éther devait être un milieu très tendu et très dense afin de permettre à la lumière de se déplacer aussi rapidement

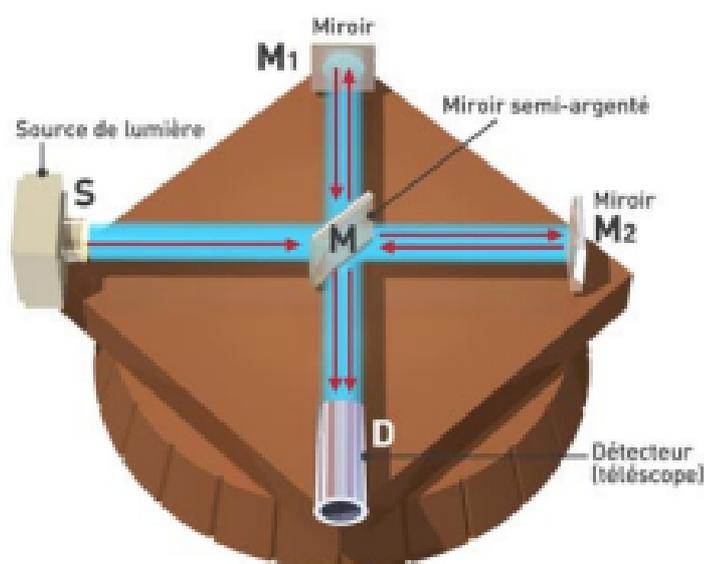
Analogie : Vitesse d'une onde dans une corde  $v = F / \mu$

- L'éther devait être très fluide, car une planète se déplace dans l'espace avec une grande vitesse sans ralentissement

Analogie : Un bateau qui se déplace dans l'eau doit déplacer l'eau autour de lui ce qui provoque un ralentissement.

## 3. L'interféromètre de Michelson-Morley

L'expérience d'Albert A. Michelson et Edward Morley (1887) avait pour but d'évaluer la vitesse de la Terre par rapport à l'éther. Si la Terre était en mouvement par rapport à l'éther, la vitesse de la lumière provenant d'une source devait subir l'influence d'un « vent ». C'est pourquoi l'appareil était conçu pour faire voyager de la lumière dans le sens du « vent » et dans un sens perpendiculaire au « vent ». Puisque la lumière devait effectuer deux trajets de même distance avec des vitesses différentes, une interférence causée par une différence de marche devait être observée au détecteur. Malheureusement, cette observation ne fut pas réalisée et l'expérience fut considérée comme un échec.



## 4. Le conflit entre Galilée et l'électromagnétisme

En plus des observations effectuées grâce à l'expérience de Michelson-Morley, un problème mathématique était toujours présent :

Les équations de Maxwell ne sont pas invariantes sous une transformation de Galilée.

Cette remarque implique que :

Un expérimentateur qui effectue une mesure d'un phénomène électromagnétique dans son référentiel n'obtient pas les mêmes résultats après une transformation de Galilée qu'un autre expérimentateur qui effectue la même mesure, mais dans un autre référentiel.

## 5. La transformation particulière de l'électromagnétisme



H.A. Lorentz  
(1853-1928)

Afin de régler la question de la transformation des équations de Maxwell, Hendrik Antoon Lorentz a dérivé une nouvelle forme de transformation (transformation de Lorentz) rendant invariante les équations de Maxwell. Cette nouvelle transformation avait des conséquences très inattendues :

- 1) La vitesse de la lumière est une constante pour tous les référentiels inertiels.
- 2) Les distances ne se transforment plus de la même façon.

$$D_B \neq D_A + u_{xAB} T_A$$

- 3) Les longueurs ne se transforment plus de la même façon.

$$L_B \neq L_A$$

- 4) Les durées ne se transforment plus de la même façon.

$$T_B \neq \bar{T}_A$$

Il est important de remarquer que la transformation de Lorentz est identique à la transformation de Galilée lorsque la vitesse relative  $u_{xAB}$  est faible par rapport à la vitesse de la lumière ( $u_{xAB} \ll c$ ). On peut donc affirmer que la transformation de Galilée est une approximation à basse vitesse de la transformation de Lorentz.

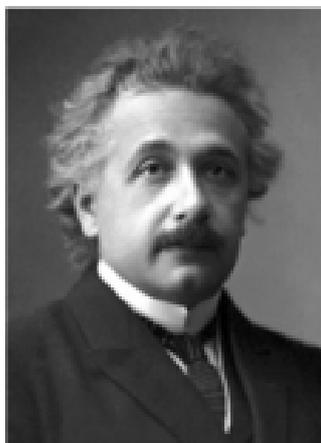
Les nouveaux résultats contre intuitifs mènent au dilemme suivant :

Les équations de Maxwell sont bonnes et la transformation la plus complète et la plus générale est celle de Lorentz.

ou

Les équations de Maxwell sont erronées et la transformation de Galilée est toujours vraie quelque soit la vitesse du référentiel.

## 6. Albert Einstein et les deux postulats de la relativité



**Albert Einstein**  
(1879-1955)

Malgré le travail exceptionnel de Lorentz, plusieurs questions demeuraient sans réponses et les explications étaient insatisfaisantes.

En 1905, Albert Einstein publia un 3ième article sur la relativité restreinte basée sur la transformation de Lorentz et les résultats de l'expérience de Michelson-Morley. Il fut en mesure de décrire qualitativement et quantitativement la physique dans n'importe quel référentiel sans l'intervention de « l'éther » si l'on acceptait le fait que la lumière était un invariant (la vitesse de la lumière est constante quelque soit le choix du référentiel). Sa théorie faisait intervenir les deux postulats suivants :

### Postulats 1 : Principe de relativité

Les lois de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels inertiels.

### Postulats 2 : L'invariance de la vitesse de la lumière

La vitesse de la lumière dans le vide est égale à  $c$  dans tous les référentiels inertiels. Elle ne dépend pas du mouvement de la source ni de l'observateur.

Ces deux postulats ont eux les conséquences suivantes :

- 1) Il n'y a pas « d'éther ». La lumière voyage dans le vide et elle interagit avec la matière.
- 2) La lumière se déplace à une vitesse qui est égale à  $c$  quel que soit le choix du référentiel.
- 3) Le temps est relatif. L'écoulement du temps entre deux événements dépend du choix du référentiel (dilatation du temps).
- 4) L'espace est relatif. La distance entre deux événements dépend du choix du référentiel (contraction des longueurs).
- 5) La simultanéité est relative. Le moment d'un événement dépend du choix du référentiel (relativité de la simultanéité).

Maintenant, le concept de mesure est entièrement relatif au choix du référentiel :

Galilée (Mécanique Newtonienne)	Einstein (Mécanique relativiste)
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Temps (absolu)</li> <li>• Espace (absolu)</li> <li>• Vitesse de la lumière (relative)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Temps (relatif)</li> <li>• Espace (relatif)</li> <li>• Vitesse de la lumière (absolue)</li> </ul>

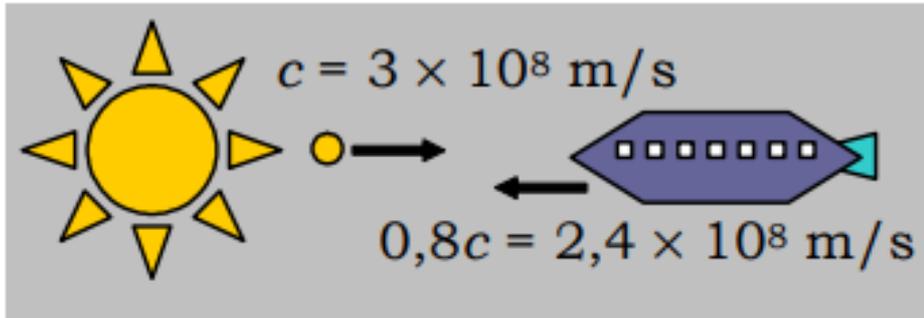
## 7. La vitesse de la lumière et deux objets en mouvement

La vitesse de la lumière doit toujours être égale à  $c$  par rapport à un référentiel inertiel.

Cependant, la vitesse relative de la lumière par rapport à un objet en mouvement d'après un référentiel inertiel qui n'est pas l'objet lui-même peut être différente de  $c$ .

Considérons la situation suivante :

Un vaisseau spatial fonce vers le Soleil avec une vitesse de  $0,8c$  et rencontre un faisceau de lumière qui fonce vers le vaisseau à vitesse  $c$ .



Dans le référentiel du Soleil :

- Le Soleil est immobile.
- Le vaisseau fonce vers le Soleil avec une vitesse égale à  $0,8c$ .
- Le faisceau de lumière quitte le Soleil avec une vitesse égale à  $c$ .
- Par rapport au Soleil, la vitesse relative de rapprochement du vaisseau et du faisceau de lumière est égale à  $c + 0,8c = 1,8c$ .

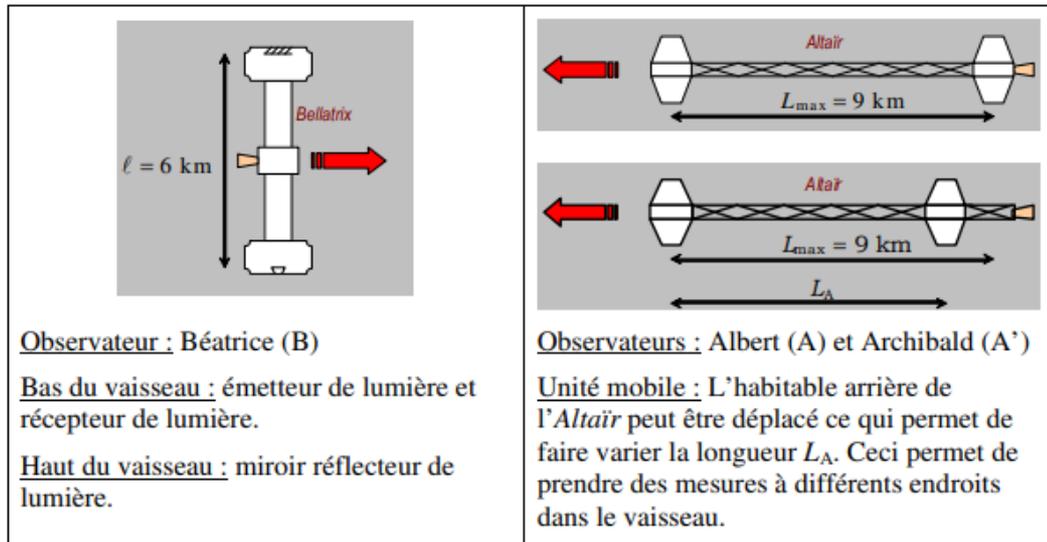
Dans le référentiel du vaisseau :

- Le vaisseau est immobile.
- Le Soleil fonce vers le vaisseau avec une vitesse égale à  $0,8c$ .
- Le faisceau de lumière fonce vers le vaisseau avec une vitesse égale à  $c$ .
- Par rapport au vaisseau, la vitesse relative d'éloignement du Soleil et du faisceau de lumière est égale à  $c - 0,8c = 0,2c$ .

## 8. La dilatation du temps

### 8.1. Nos deux vaisseaux de l'espace

Afin d'illustrer les conséquences de la relativité restreinte, nous aurons besoin d'objets se déplaçant à de très grandes vitesses. Définissons deux vaisseaux spatiaux pouvant voyager dans l'espace à de très grandes vitesses :



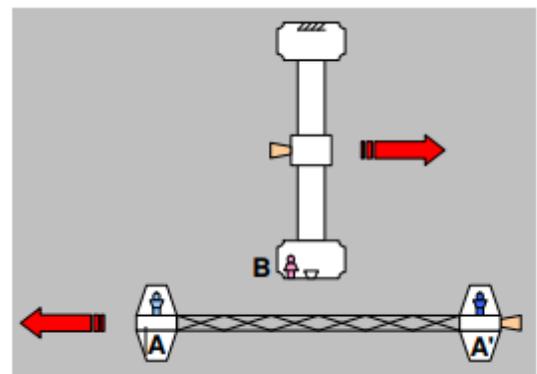
Les **longueurs** des deux vaisseaux ont été évaluées **au repos**. Autrement dit, une personne qui marche à l'intérieur du vaisseau et effectue la mesure de la longueur avec un pedomètre obtiendra 6 km pour le Bellatrix et une longueur de 9 km pour l'Altaïr.

### 8.2. Le croisement des deux vaisseaux

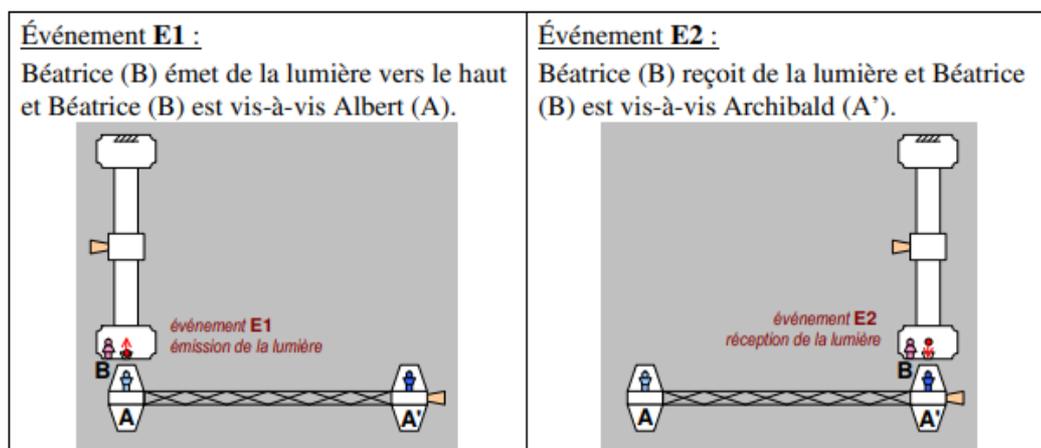
Afin d'illustrer un phénomène relié à la relativité restreinte, le Bellatrix et l'Altaïr vont effectuer l'expérience suivante :

Situation : Le Bellatrix et l'Altaïr se croisent à une vitesse relative  $v$ .

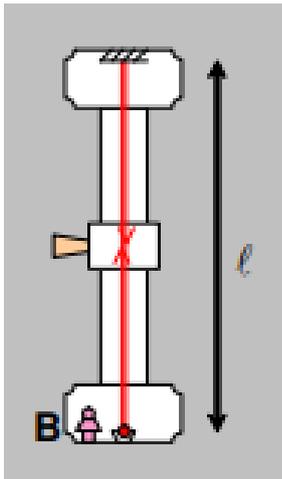
Question : Combien de temps  $T$  prend un faisceau de lumière pour faire un aller-retour dans le Bellatrix selon Bellatrix (TB) et selon l'Altaïr (TA) ?



La question sera étudiée à l'aide de deux événements :



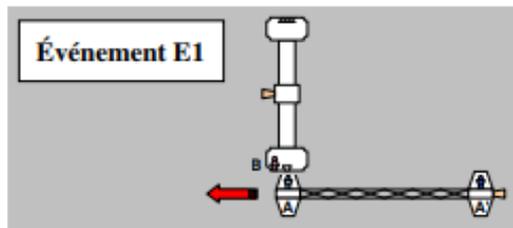
**Dans le référentiel du Bellatrix**



Dans le référentiel du Bellatrix, nous avons les informations suivantes :

- Le Bellatrix est immobile.
- L'Altair se déplace à une vitesse de  $v$ .
- La lumière se déplace sur une distance  $2\ell$  (aller- l retour) avec une vitesse  $c$  entre l'événement E1 et l'événement E2.

Trajet de la lumière selon Bellatrix

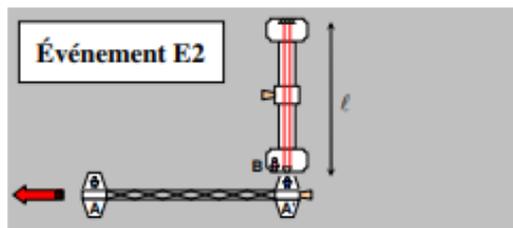


Voici les mesures associées à nos deux événements :

**Événement 1 :**

Position :  $x_{B(1)} = 0$

Temps :  $t_{B(1)} = 0$



**Événement 2 :** (avec  $x = vt$ )

Position :  $x_{B(2)} = 0$

Temps :  $t_{B(2)} = 2\ell/c$

Selon le référentiel du Bellatrix, nous avons les mesures suivantes pour la distance et la durée entre nos deux événements :

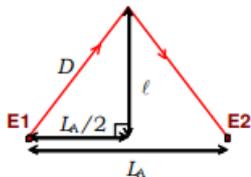
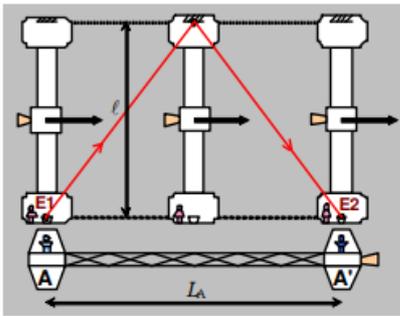
Distance :  $D_B = \Delta x_B = x_{B(2)} - x_{B(1)} = (0) - (0) \Rightarrow \boxed{D_B = 0}$

Durée :  $T_B = \Delta t_B = t_{B(2)} - t_{B(1)} = \left(\frac{2\ell}{c}\right) - (0) \Rightarrow \boxed{T_B = \frac{2\ell}{c}}$

Exemple : (Situation du livre de référence :  $v = 0,6 c$ ,  $\ell = 6 \text{ km}$ )

$D_B = 0$  et  $T_B = 40 \mu\text{s}$

Dans le référentiel de l'Altair



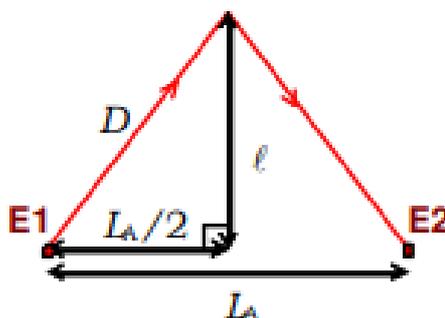
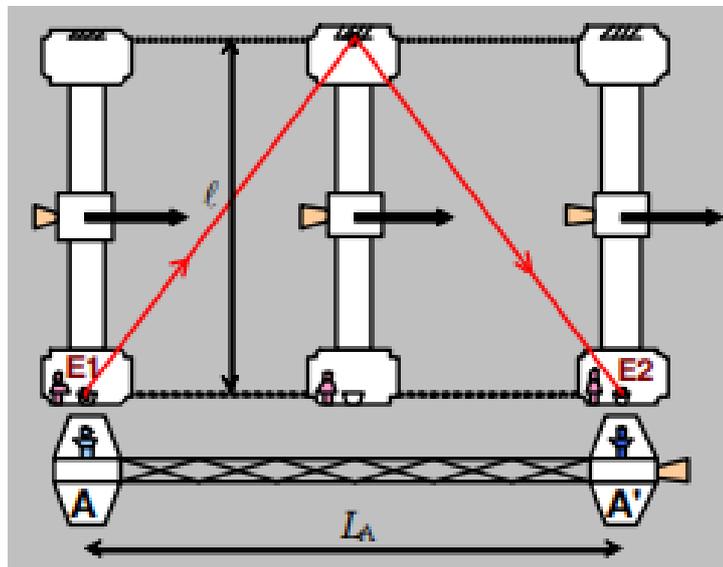
Dans le référentiel de l'Altair, nous avons les informations suivantes :

- L'Altair est immobile.
- Le Bellatrix se déplace avec une vitesse  $v$ .
- Bien que la lumière soit émise vers le haut dans le Bellatrix, l'Altair observera une trajectoire de forme triangulaire. Cette trajectoire sera plus grande que  $2l$ .
- La lumière se déplace sur une distance égale à  $2D$  avec une vitesse  $c$  entre l'événement E1 et l'événement E2.
- La distance  $D$  peut être évaluée à l'aide du théorème de Pythagore de la façon suivante :

Dans le référentiel de l'Altair, nous avons les informations suivantes :

- L'Altair est immobile.
- Le Bellatrix se déplace avec une vitesse  $v$ .
- Bien que la lumière soit émise vers le haut dans le Bellatrix, l'Altair observera une trajectoire de forme triangulaire. Cette trajectoire sera plus grande que  $2l$ .
- La lumière se déplace sur une distance égale à  $2D$  avec une vitesse  $c$  entre l'événement E1 et l'événement E2.
- La distance  $D$  peut être évaluée à l'aide du théorème de Pythagore de la façon suivante :

$$D = \sqrt{(L_A/2)^2 + l^2}$$



**Questions :**

- 1) Puisqu'il n'y a pas « d'éther » pour donner une composante de vitesse horizontale à la lumière, comment la lumière peut-elle se déplacer avec une trajectoire triangulaire selon l'Altair si elle est lancée seulement verticalement selon le Bellatrix ?
- 2) Est-ce que Albert et Béatrice sont en accord sur l'orientation initiale du faisceau de lumière ?
- 3) Pourquoi la lumière ne se déplace pas verticalement dans les deux référentiels ?
- 4) Est-ce que la lumière se déplace « réellement » à la vitesse  $c$  dans les deux référentiels ?
- 5) Comment peux-tu observer le déplacement de la lumière si elle voyage dans le vide ?

**Réponse :**

Il est important de rappeler que c'est en **observant** la **déformation d'un milieu** sous le passage de l'onde que l'on peut observer la **présence** de l'onde et évaluer sa vitesse.

**Nous observons le déplacement des vagues pour visualiser la vitesse de l'onde voyageant à la surface de l'eau.**

 Exemple

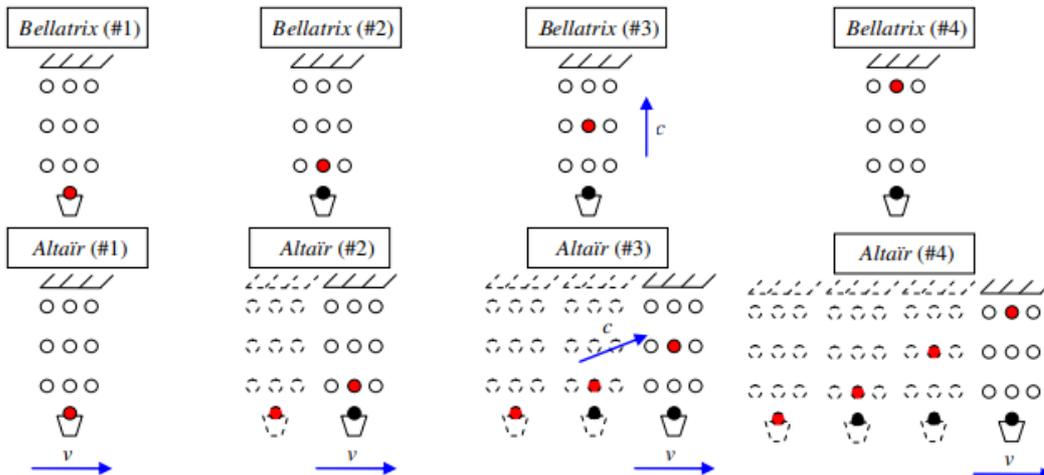
Dans le cas des ondes lumineuses, il y a une particularité très déstabilisante : la lumière voyage dans le « vide », mais nous ne pouvons pas observer la déformation du « vide ». Les ondes lumineuses s'observent par l'intermédiaire de son interaction avec la matière. Le 2ième postulat d'Albert Einstein stipule que la lumière doit toujours être observée se déplaçant à la vitesse  $c$ . Ainsi, la **lumière** doit toujours **interagir** avec la **matière** à une **vitesse  $c$**  (et à  $c/n$  dans un milieu matériel).

La **lumière** devient alors une **onde particulière**, car tout observateur est immobile par rapport au vide (pas d'éther), mais un observateur peut être en mouvement par rapport au milieu d'interaction. Une lumière voyageant dans un espace en mouvement par rapport à un

observateur aura une trajectoire plus grande à parcourir. La durée du trajet augmentera, car la lumière se déplace dans tous les référentiels à vitesse  $c$  sans « effet de vent » causé par le mouvement de l'espace qui pourrait affecter la vitesse de l'onde par rapport à l'observateur.

 Exemple

Dans le Bellatrix, la lumière est lancée verticalement. Selon l'Altair, la lumière est lancée verticalement, mais l'espace transporté dans le Bellatrix pouvant interagir avec la lumière permettant à Albert d'observer la trajectoire de la lumière se déplace vers la droite. Supposons que cet espace est rempli de fumée et observons la séquence d'illumination de la fumée dans les deux référentiels.



Dans les deux référentiels, ce sont les mêmes éléments de fumée qui seront éclairés (même expérience). Dans le Bellatrix, la trajectoire est verticale à la vitesse  $c$ . Dans l'Altair, la trajectoire est triangulaire à la vitesse  $c$ . La conséquence de cette expérience impose que la durée du trajet n'est pas la même dans les deux référentiels !!!

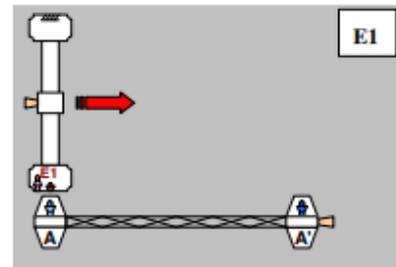
### Retour à l'Altair

Voici les mesures associées à nos deux événements :

#### Événement 1 :

Position :  $x_{A(1)} = 0$

Temps :  $t_{A(1)} = 0$

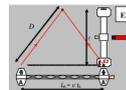


Événement 2: (avec  $x = vt$ )

Position :  $x_{A(2)} = L_A = vt_{A(2)}$

Temps :

$$t_{A(2)} = \frac{2D}{c} = \frac{2\sqrt{(L_A/2)^2 + \ell^2}}{c}$$



Nous remarquons ici que la position du 2<sup>ème</sup> événement dépend du temps du 2<sup>ème</sup> événement et vice-versa. Retirons la dépendance de la position  $L$  dans notre mesure de temps :

$$t_{A(2)} = \frac{2\sqrt{(L_A/2)^2 + \ell^2}}{c} \Rightarrow t_{A(2)}^2 = \frac{4[(L_A/2)^2 + \ell^2]}{c^2} \quad (\text{Mettre au carré})$$

$$\Rightarrow t_{A(2)}^2 = \frac{4\left[\frac{L_A^2}{4} + \ell^2\right]}{c^2} \quad (\text{Mettre au carré } L/2)$$

$$\Rightarrow t_{A(2)}^2 = \frac{L_A^2 + 4\ell^2}{c^2} \quad (\text{Distribution du chiffre 4})$$

$$\Rightarrow t_{A(2)}^2 = \frac{(vt_{A(2)})^2 + 4\ell^2}{c^2} \quad (\text{Remplacer } L_A = vt_{A(2)})$$

$$\Rightarrow c^2 t_{A(2)}^2 = v^2 t_{A(2)}^2 + 4\ell^2 \quad (\text{Mettre au carré, Multiplier par } c^2)$$

$$\Rightarrow c^2 t_{A(2)}^2 - v^2 t_{A(2)}^2 = 4\ell^2 \quad (\text{Isoler terme avec } t_{A(2)})$$

$$\Rightarrow t_{A(2)}^2 (c^2 - v^2) = 4\ell^2 \quad (\text{Factoriser } t_{A(2)}^2)$$

$$\Rightarrow t_{A(2)}^2 = \frac{4\ell^2}{c^2 - v^2} \quad (\text{Isoler } t_{A(2)}^2)$$

$$\Rightarrow \boxed{t_{A(2)} = \frac{2\ell}{\sqrt{c^2 - v^2}}} \quad (\text{Appliquer la racine carrée})$$

Selon le référentiel de l'Altair, nous avons les mesures suivantes pour la distance et la durée : (puisque Albert et Archibald sont synchronisés, la distance est égale à la longueur)

Distance :  $D_A = \Delta x_A = x_{A(2)} - x_{A(1)} = (vt_{A(2)}) - (0) \Rightarrow \boxed{D_A = \frac{2\ell v}{\sqrt{c^2 - v^2}}}$

Durée :  $T_A = \Delta t_A = t_{A(2)} - t_{A(1)} = \left(\frac{2\ell}{\sqrt{c^2 - v^2}}\right) - (0) \Rightarrow \boxed{T_A = \frac{2\ell}{\sqrt{c^2 - v^2}}}$

Exemple : (Situation du livre de référence :  $v = 6,0 c$ ,  $\ell = 6$ )

$D_A = L_A = 9 \text{ km}$  et  $T_A = 50 \mu\text{s}$

### 8.3. Comparaisons des intervalles de temps et des distances

À partir de cette situation, nous remarquons que la durée entre deux événements n'est pas identique dans les deux référentiels :

Valeur de référence :  $v = 0,6 c$  ,  $l = 6 \text{ km}$

	Référentiel de l'Altair	Référentiel du Bellatrix
Durée : (intervalle de temps)	$T_A = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - v^2}} = 50 \text{ } \mu\text{s}$	$T_B = \frac{2l}{c} = 40 \text{ } \mu\text{s}$
Distance : (intervalle d'espace)	$D_A = \frac{2lv}{\sqrt{c^2 - v^2}} = 9 \text{ km}$	$D_B = 0$



Nous avons une contradiction avec la transformation de Galilée, car  $T_A \neq T_B$

### 8.4. Intervalle de temps propre

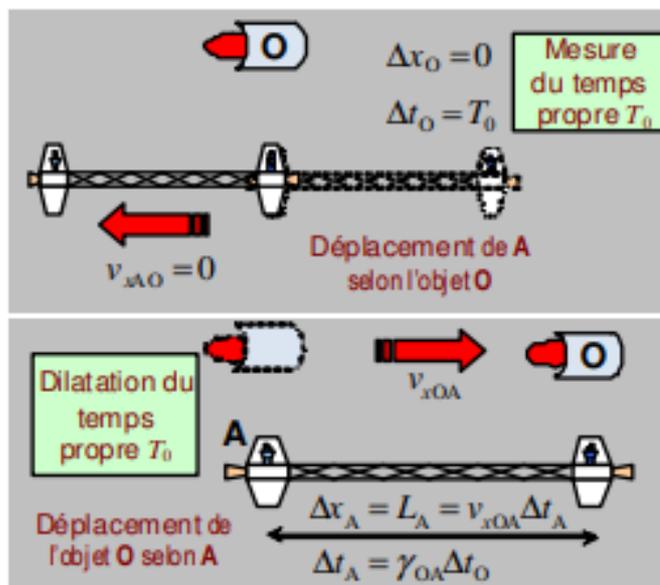
Un **intervalle de temps propre**  $T_0$  est une **mesure d'intervalle de temps** entre **deux événements** situés au **même endroit** ( $D = 0$ ) par rapport à un référentiel. Il n'y a qu'un seul référentiel qui peut effectuer cette mesure, car cette mesure nécessite **qu'un seul observateur** pour **observer** les **deux événements**.

### 8.5. Dilatation du temps (transformation du temps propre)

La dilatation du temps  $T$  s'applique lorsque l'on veut transformer un intervalle de temps propre  $T_0$  mesuré entre deux événements vers un référentiel qui constate l'unique observateur (qui mesure le temps propre) être en mouvement à vitesse relative  $v$  par rapport à lui :

$$T = \gamma T_0$$

- où  $T$  : Intervalle de temps dilaté (s).
- $\gamma$  : Facteur de Lorentz ( $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ ).
- $T_0$  : Intervalle de temps propre (s).
- $v$  : Vitesse relative entre les deux référentiels (m/s).



$$v = 6,0 c, \quad km l = 6$$

? *Exemple*

$$T_B = 40 \mu s \text{ et } \gamma = 1,25 \text{ ce qui nous donne } T_A = \gamma T_B = (1,25)(40) = 50 \mu s$$

Q *Remarque*

Il est important de remarquer que cette transformation est valide seulement lorsque la mesure de  $T_B$  est effectuée par un observateur unique (ex : Béatrice).