Modélisation et Commande des Robots Manipulateurs

Dr Bensalah Choukri

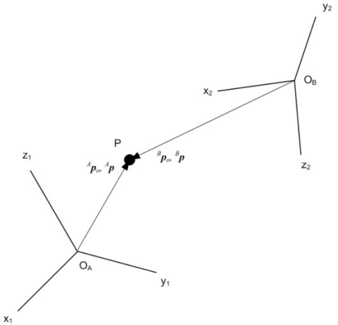
Université Abou Bekr Belkaid
Faculté de Technologie
Laboratoire d'Automatique

Chapitre 0: Repérage Géométrique

Repérage Géométrique

Pose (en anglais) position et orientation): il décrit une translation $p \in \mathbb{R}^3$ et une rotation $R \in SO(3)$.

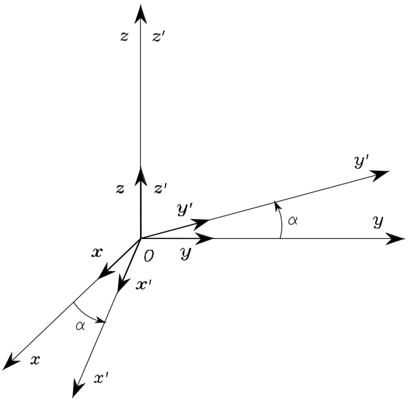
- Position: Dans l'espace cartesien, la position P peut être exprimé par le vecteur colonne de trois dimension: $P_A = [p_x, p_y, p_z]^T$ avec A dénote le repère dans lequel est défini le point P. Si le repère n'est pas nommé, les coordonnées seront (x, y, z)



Il est clair que $P_A \neq P_B$

- Orientation: L'orientation peut être représentée par une matrice de 3×3. Supposons qu'un repère $O - xyz$ a fait une rotation d'un angle α autour de l'axe z et soit $O - x'y'z'$ le repère résultant.

$$x' = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix}, y' = \begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix}, z' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



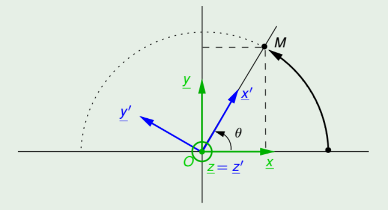
- Donc, la matrice de rotation résultante est:

$$R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

D'une manière similaire:

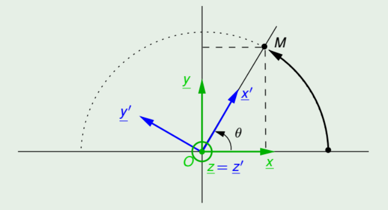
$$R_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}, R_x(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}$$

Exemple 1



- M de coordonnées $(\sqrt{3}, 0, 0)^T$ dans le repère initial.
- Coordonnées de M après une rotation $R_z(\frac{\pi}{3})$?

Exemple 1



- M de coordonnées $(\sqrt{3}, 0, 0)^T$ dans le repère initial.
- Coordonnées de M après une rotation $R_z(\frac{\pi}{3})$?
- $$P = R_z(\alpha)P'$$

Composition des matrices de rotation

Soit trois repères $O_{xyz}, O_{x_1y_1z_1}$ et $O_{x_2y_2z_2}$. Le vecteur P peut s'exprimer dans les trois repères par les expressions p_0, p_1, p_2. Donc,

$$p_1 = R_2^1 p_2$$

de même:

$$p_0 = R_1^0 p_1$$

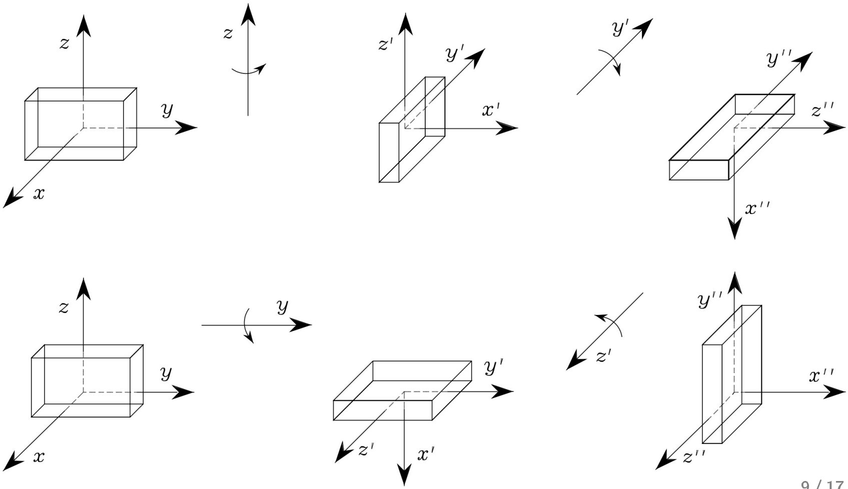
$$p_0 = R_2^0 p_2$$

Donc, on obtient la composition suivante:

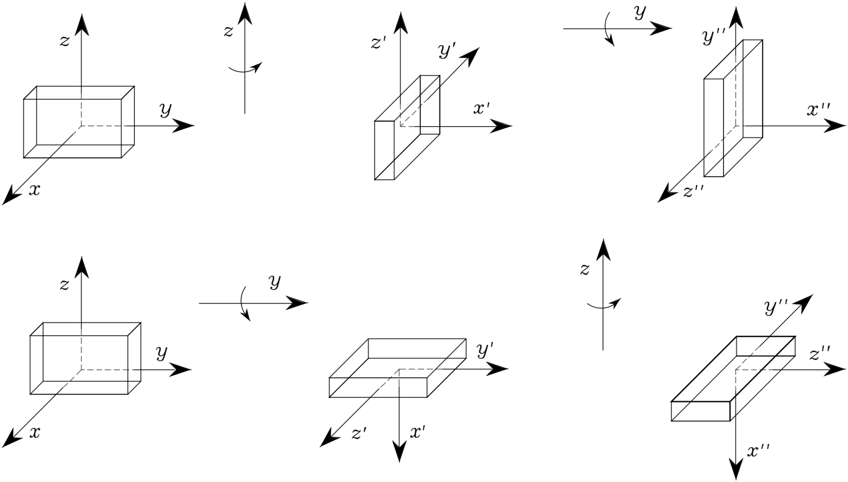
$$R_2^0 = R_1^0 R_2^1$$

L'ordre de rotation est important

Exemple 2: succession de rotation autour de des axes du repère actuel



Exemple 3: succession de rotation autour des axes du repère d'origine

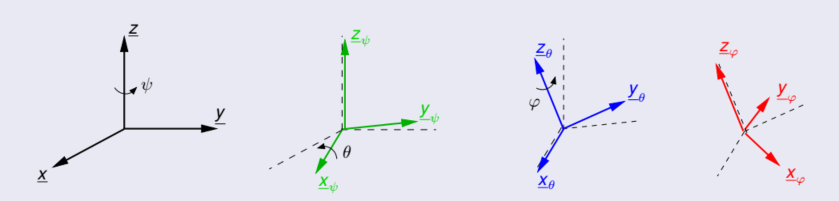


Angles d'Euler

- Angles d'Euler classiques = trois rotations successives:
- $ZYZ, ZXZ, ...XYZ, ...$
- XYZ roulis,tangage,lacet (roll,pitch,yaw)

Exemple 4: Angle d'Euler ZXZ

$$R_z(\phi), R_{x_\phi}(\theta) \; puis \; R_{z_\theta}(\psi)$$



Matrice de rotation résultante (Euler ZXZ)

Chaque nouvelle rotation effectuée par rapport à un repère ayant tourné:

$$R = R(\underline{z}, \psi)\ R(\underline{x}_\psi, \theta)\ R(\underline{z}_\theta, \varphi)$$

soit :

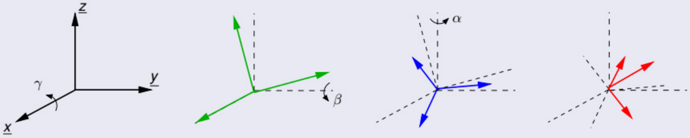
$$\begin{aligned} R &= \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\cos\theta\sin\varphi & -\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\theta\cos\varphi & \sin\psi\sin\theta \\ \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\cos\theta\sin\varphi & -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\theta\cos\varphi & -\cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Orientation dans l'espace des angles RPY

Angles de roulis, tangage et lacet : trois rotations successives :

$$R(\underline{x}, \gamma), \; R(\underline{y}, \beta) \text{ puis } R(\underline{z}, \alpha)$$

avec γ, β, et α angles de *roulis*, *tangage* et *lacet*.



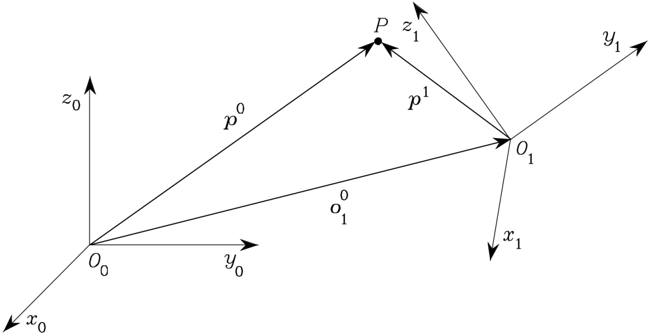
Matrice de rotation dans l'espace des angles RPY

Chaque nouvelle rotation étant effectuée par rapport à un axe du repère fixe $\mathcal{R}$:

$$R = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_x(\gamma)$$

$$\begin{aligned} R &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma & \sin\alpha\sin\gamma + \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma \\ \sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma & -\cos\alpha\sin\gamma + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma \\ -\sin\beta & \cos\beta\sin\gamma & \cos\beta\cos\gamma \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Matrices de transformation homogènes



$$p^0 = O_1^0 + R_1^0 p^1$$

Il en résulte:

$$p^1 = -{R_1^0}^T O_1^0 + {R_1^0}^T p^0$$

Matrices de transformation homogènes

Dans le but d'avoir une représentation compacte de la relation entre les coordonnées d'un même point dans deux différents repères, on introduit la transformation homogène d'un vecteur générique $\tilde{p}$ défini par:

$$\tilde{p} = \begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix}$$

On obtient la transformation suivante:

$$\tilde{p}^0 = A_1^0 \tilde{p}_1 \Rightarrow \tilde{p}_1 = (A_1^0)^{-1} \tilde{p}^0$$

avec $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$

$$A = \begin{bmatrix} R_1^0 & O_1^0 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} {R_1^0}^T & -{R_1^0}^T O_1^0 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

$R_1^0 \in SO(3)$ et $O_1^0 \in \mathbb{R}^3$

Exercice

Consider showing a robot set up 1m from the table. The table dimension is 1m square of its top and 1m in height. It is affixed with $\{x_1 y_1 z_1\}$. A small cube, with which is assigned the frame $\{x_2 y_2 z_2\}$, is placed at the center of the table. A camera, located by $\{x_3 y_3 z_3\}$, is installed above the table corner opposite to $\{x_1 y_1 z_1\}$ by 2m. Determine the transformations relating each of these frames to the base frame $\{x_0 y_0 z_0\}$. Determine the position of the box seen from the camera, by the transformation calculation and by direct observation.