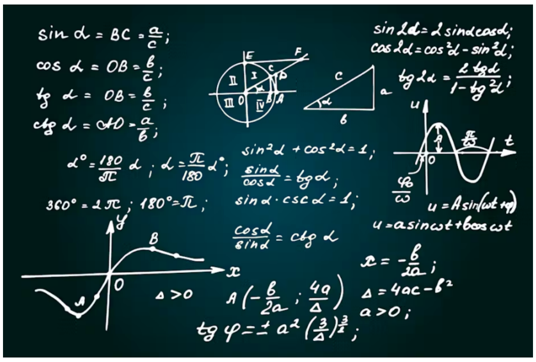
Mathématique 1

Mars 2024



KAROUN Rabia Chaimaà

29/06/2024
5.0

Table des matières

Objectifs

Ce module offrira aux étudiants l'opportunité de :

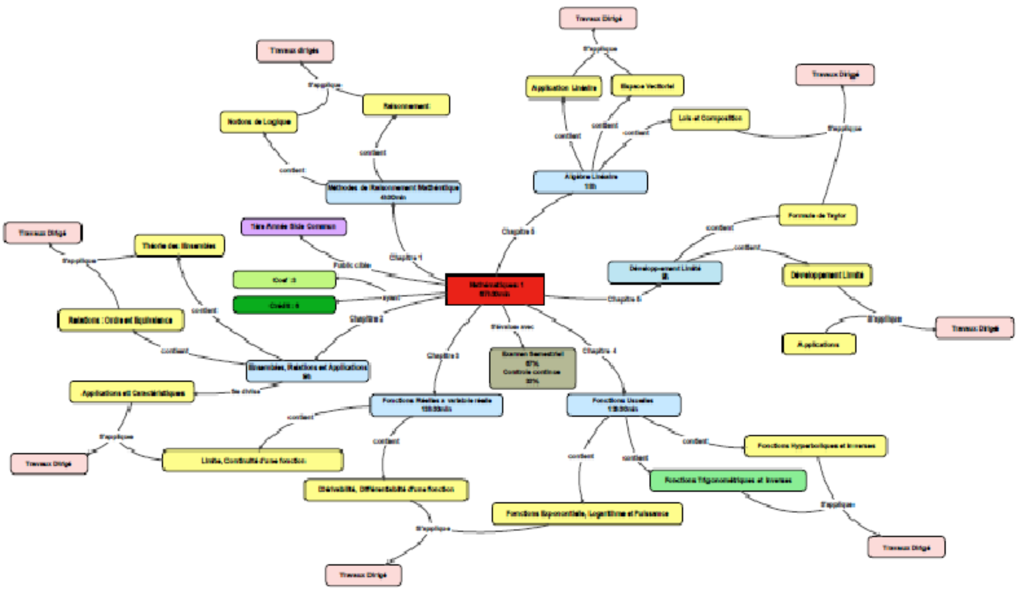
- Identifier les principaux opérateurs logiques et leurs caractéristiques.
- Savoir comment organiser un raisonnement mathématique.
- Acquérir des connaissances sur les ensembles et les relations, les fonctions et les applications linéaires.
- Acquérir des connaissances sur les fonctions continues et différentiables développées au cours des années précédentes.
- Maîtriser les principales caractéristiques des fonctions usuelles.

Introduction

Ce cours s'adresse aux étudiants de première année Génie Industrielle L.M.D, il donne une base générale essentielle pour la poursuite des études dans les années à venir, en acquérant les formalismes mathématiques de base en algèbre et en analyse, ainsi que leurs applications.

Le cours se compose d'un ensemble d'unités d'apprentissage qui permet aux étudiants non seulement de développer des compétences en mathématiques, mais surtout d'acquérir les compétences requises pour suivre les autres modules de la spécialité, qui sont basés sur les mathématiques.

Le cours est composé de six unités d'apprentissage (chapitres), l'ensemble de ces unités est décrit dans la figure suivante.



Prérequis

I

- Pour pouvoir suivre le cours de Mathématiques 1, il sera nécessaire d'avoir des compétences en mathématiques de niveau terminal.
- Afin de garantir le bon déroulement du cours, il est essentiel que les étudiants aient une connaissance approfondie du vocabulaire et des concepts mathématiques, ainsi que des compétences en formules mathématiques, en modes de raisonnement et en théorèmes de base.
  Dans la partie suivante on va donner un test de prérequis des des notions classiques de Mathématiques, veuillez cocher la ou les bonne(s) réponse(s) après avoir détailler les calculs sur le brouillon.
- En cas d'échec au test des prérequis veuillez consulter le site suivant *https://mohamedkadhem.com /baccalaureat/*

Exercice : Test prérequis

II

Exercice : Question 1

Si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ et $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$ alors :

- ▢ $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = 0$
- ▢ $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = +\infty$
- ▢ $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = -\infty$
- ▢ On ne peux pas conclure pour la limite du produit

Exercice : Question 2

Le domaine de définition Df de la fonction $f(x) = ln(1 - x)$ est égal à :

- ▢ $\mathbb{R}$
- ▢ $]1, +\infty[$
- ▢ $]-\infty, 1[$
- ▢ $[1, +\infty[$

Exercice : Question 3

La dérivée de la fonction $f(x) = ln(4x - 2)$ est :

- ▢ $f'(x) = \dfrac{1}{x - 1}$
- ▢ $f'(x) = \dfrac{1}{4x - 2}$
- ▢ $f'(x) = \dfrac{2}{2x - 1}$

Chapitre : Fonction réelle à variable réelle

III

Dans ce chapitre, on présente le cours de fonction réelle à variable réelle, il est composé de deux parties : dans la première partie on expose la notion de limite et de continuité d'une fonction, ensuite, dans la deuxième partie, on présente la notion de dérivée d'une fonction. Finalement, on donne quelques exercices sous forme de Q.C.M.

Notons que dans ce chapitre, on se focalise aux applications réelles à variable réelle; cependant, nous encourageons l'étudiant curieux à consulter le lien suivant *https://www.eyrolles.com/Sciences/Livre/elements-d-analyse-9782729876562/* pour en savoir davantage.

Objectifs du chapitre :

Dans ce chapitre, les étudiants pourront :

- acquérir une compréhension des concepts fondamentaux des fonctions.
- acquérir une maîtrise des limites des fonctions.
- explorer les concepts de continuité et de prolongement par continuité et de la dérivé d'une fonction.

1. Limite et continuité d'une fonction

1.1. Définitions

1. On appelle fonction réelle d'une variable réelle, toute fonction f de $\mathbb{R}$ ou d'une partie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ tel que,

$f : F \to E$

$x \to f(x)$

2. Une fonction f définie sur un intervalle I symétrique par rapport à 0 est dite paire si :$\forall x \in I, f(-x) = f(x)$

3. Une fonction f définie sur un intervalle I symétrique par rapport à 0 est dite impaire si :$\forall x \in I, f(-x) = -f(x)$

4. Une fonction f est dite périodique, s'il existe un nombre positif $T > 0$, tel que $f(x + T) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$.

T est appelé période de la fonction f s'il est le plus petit nombre vérifiant $f(x + T) = f(x)$.

5.Une fonction f définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est dite majorée si et seulement si : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in E, f(x) \leq M$.

6. Une fonction f définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est dite minorée si et seulement si : $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in E, m \leq f(x)$.

7. Une fonction f définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est dite bornée si et seulement si elle est majorée et minorée : $\exists m \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R} \forall x \in E, m \leq f(x) \leq M$.

ou bien : $\exists A > 0 \in \mathbb{R}, \forall x \in E, |f(x)| \leq A$.

8. Une fonction f définie sur un ensemble$E \subset \mathbb{R}$ est dite croissante si et seulement si :$\forall x, \forall y \in E; x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

9. Une fonction f définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ sera dite décroissante si et seulement si : $\forall x, \forall y \in E; x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.

1.2. Limite d'une fonction en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et soit $x_0 \in I$, on dit que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers x_0 si : $\forall \epsilon > 0, \exists \alpha_\epsilon > 0; \forall x \in I, (|x - x_0| < \alpha_\epsilon)|f(x) - l| < \epsilon)$.

On note : $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

Types de limites

1. On dit que$f(x)$ tend vers l quand x tend vers x_0 par valeurs supérieures si :

$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha_\epsilon > 0; \forall x \in I, (0 < x - x_0 < \alpha_\epsilon)|f(x) - l| < \epsilon)$.

On note : $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l.$

On l'appelle aussi limite à droite de x_0.

2. On dit que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers x_0 par valeurs inferieurs si :

$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha_\epsilon > 0; \forall x \in I, (-\alpha_\epsilon < x - x_0 < 0)|f(x) - l| < \epsilon).$

On note : $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l.$

On l'appelle aussi limite à gauche de x_0.

Proposition

On a $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ si et seulement si $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l.$

1.3. Définition équivalente

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ si et seulement si $\forall (u_n)_n$ suite, $((\lim_{n \to \infty} u_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(u_n) = l),$

cette définition permet de déduire les propriétés de la limite d'une

fonction en un point en utilisant les suites.

Théorème 1

Soit g et f deux fonctions données alors :

1. si on a $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_1$ et $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2$ alors $\lim_{x \to x_0} g(x) + f(x) = l_1 + l_2$
2. si on a $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_1$ et $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2$ alors $\lim_{x \to x_0} g(x).f(x) = l_1.l_2$
3. si on a $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_1$ et $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2 \neq 0$ alors $\lim_{x \to x_0} g(x)/f(x) = l_1/l_2$
4. si on a $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ et la fonction f est une fonction bornée alors $\lim_{x \to x_0} g(x).f(x) = 0$

Théorème 2 : (critère de Cauchy)

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ si et seulement si $\forall \epsilon > 0, \exists \alpha_\epsilon > 0 ; \forall x, x' \in I, |x - x_0| < \alpha_\epsilon et |x' - x_0| < \alpha_\epsilon \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon$

1.4. Limites infinies

1. On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend versx_0 si et seulement si : $\forall A > 0, \exists \alpha > 0 ; \forall x \in I, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) > A.$

On écrit $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty.$

2. On dit que$f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend versx_0 si et seulement si : $\forall A < 0, \exists \alpha > 0 ; \forall x \in I, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) < A.$

On écrit $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty.$

3. On dit que$f(x)$ tend vers l quand x tend vers$+\infty$ si et seulement si : $\forall \epsilon > 0, \exists A > 0 ; \forall x > A \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$

On écrit $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$.

4. On dit que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers $-\infty$ si et seulement si : $\forall \epsilon > 0, \exists A < 0\ ; \forall x < A \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$.

On écrit $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$.

1.5. Continuité

1.On dit que la fonction f est continue en un point x_0 si et seulement si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2. On dit que la fonction f est continue en un ensemble $I \subset \mathbb{R}$ si et seulement si la fonction f est continue en tout point de l'intervalle I.

3. On dit qu'une fonction f est continue à droite en un point x_0 si et seulement $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

4. On dit qu'une fonction f est continue à gauche en un point x_0 si et seulement $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Propriétés

1.f est continue en un point x_0 si et seulement $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

2. Si f et g sont continues en un point x_0 alors $(f + g)$ et $(f.g)$ sont continues en x_0, et si de plus $g(x_0) \neq 0$ alors f/g est aussi continue en point x_0.

3. Si$f : A \to B$ est continue enx_0 et si la fonction $g : B \to C$ est continue en $f(x_0)$ alors la fonction (gof) est continue en x_0.

1.6. Prolongement par continuité

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, telle que f n'est pas définie en point x_0 mais elle admet une limite $l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers x_0, c'est à dire $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.

Alors, on définit la fonction$\bar{f}$ qui est appelée prolongement par continuité de la fonction f au pointx_0 par :

$$\bar{f} = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ l & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

2. Dérivabilité d'une fonction

2.1. Définitions

Soit la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ alors :

1. On dit que la fonction f est dérivable en un point $x_0 \in I$ si et seulement si la limite suivante existe et elle est finie c'est à dire :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l$$

On appelle l le nombre dérivé de la fonction f au point x_0 et on note $l = f'(x_0)$.

2. Si dans la limite précédente on pose $x = x_0 + h$, alors quand x tend vers x_0, h tend vers 0 et on a :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

3. la fonction f est dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ si et seulement si f est dérivable en tout point de l'intervalle I.

4. Si la fonction f est dérivable sur l'intervalle I, on peut définir une nouvelle fonction appelée fonction dérivée qu'on la notef', qui à chaque point $x_0 \in I$, on associe le nombre dérivé $f'(x_0)$.

5. f dérivable en $x_0 \Rightarrow f$ continue en x_0

la réciproque est fausse, une fonction peut être continue sans être dérivable

2.2. Les règles de dérivation

Si les fonctions f et g sont tous les deux dérivables alors on a :

1. $(f + g)' = f' + g'$

2. $(f.g)' = f'g + fg'$

3. $(f^{\alpha})' = \alpha f' f^{\alpha - 1}$

4. $\frac{f}{g} = \frac{fg' + g'f}{g^2}$

5. $(f.g)^{(n)} \sum_{k=0}^{(n)} \frac{n!}{k!(n-k)!} f^{(k)} g^{(n-k)}$

ou, $f^{(0)} = f', f^{(2)} = f'',..., f^{(n)} = (f^{(n-1)})', f^{(n)}$

6. $(gof)' = f'(g'of)$

2.3. Théorèmes fondamentaux

Théorème de Rolle

Soit f une fonction tel que :

1. f continue sur $[a, b]$,
2. f dérivable sur $]a, b[$,
3. $f(a) = f(b)$

alors $\exists c \in]a, b[; f'(c) = 0$.

Théorème des accroissements finis

Soit f une fonction tel que :

1. f continue sur $[a, b]$,
2. f dérivable sur$]a, b[$,

alors $\exists c \in]a, b[; f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

Théorème : Règle de l'Hopital

Soient f, g deux fonctions continues sur un intervalle $I \subset R$, sauf peut être au point $x_0 \in I$, si $f(x_0) = g(x_0) = 0$ et si on a $g'(x) \neq 0, \forall x \in I \backslash \{x_0\}$, et si de plus $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$

alors on a $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

3. Exercice

Exercice : Question 1

---

la fonction $f(x) = |x|$ est dérivable en 0.

- ○ vrai
- ○ faux

Exercice : Question 2

Une fonction f est dite continue en un point x_0 si et seulement si :

- ☐ f est continue à gauche du point x_0.
- ☐ f est continue à droite du point x_0.
- ☐ f est continue à gauche et à droite du point x_0
- ☐ $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

Test de sortie

IV

Ci joint vous trouverez un test de sortie avec son corrigé.

[cf. res]

Bibliographie

Allab, Kada Eléments d'analyse : fonction d'une variable réelle- O.P.U., 2002.

Azoulay, Elie Problèmes corrigés de mathématiques - 2 éd.. - Paris : Dunod, 2002.

Baba-Hamed. C, Benhabib. K, Algèbre 1. Rappel de cours et exercices avec solutions. O.P.U., 1985.

Baba-Hamed. C, Benhabib. K, Analyse 1. Rappel de cours et exercices avec solutions. O.P.U., 1985.

Chambadal, L. Exercices et problèmes résolus d'analyse : mathématiques spéciales. Bordas, 1973.

Hitta, Amara Cours d'algèbre et exercices corrigés. O.P.U., 1994.

El-Hadi, M. S. Algèbre et Analyse.