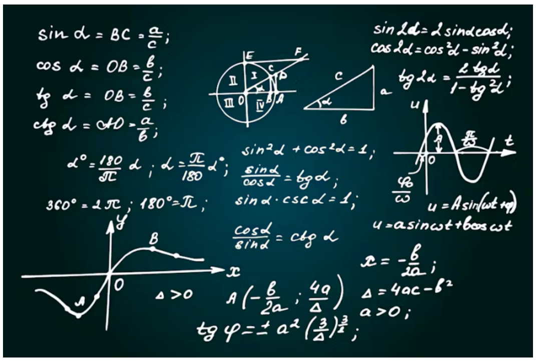
Mathématique 1

Mars 2024



KAROUN Rabia Chaimaà

29/06/2024
5.0

Table des matières

Objectifs 3

Introduction 4

I - **Prérequis** 5

II - **Exercice : Test prérequis** 6

III - **Chapitre : Algèbre linéaire** 7

1. Espaces vectoriels ... 8

1.1. Définitions ... 8
1.2. Base et dimension ... 10

2. Application linéaire ... 12

2.1. Définition ... 12
2.2. Noyau et Image ... 12
2.3. Matrice associée à une application linéaire ... 12

3. Exercice ... 14

IV - **Test de sortie** 15

Bibliographie 16

Objectifs

Ce module offrira aux étudiants l'opportunité de :

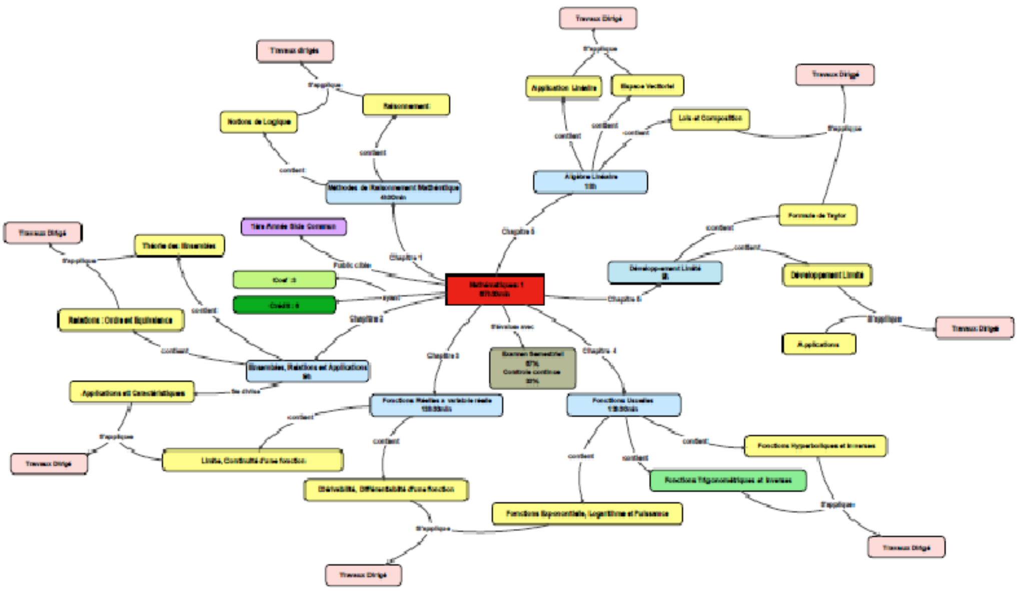
- Identifier les principaux opérateurs logiques et leurs caractéristiques.
- Savoir comment organiser un raisonnement mathématique.
- Acquérir des connaissances sur les ensembles et les relations, les fonctions et les applications linéaires.
- Acquérir des connaissances sur les fonctions continues et différentiables développées au cours des années précédentes.
- Maîtriser les principales caractéristiques des fonctions usuelles.

Introduction

Ce cours s'adresse aux étudiants de première année Génie Industrielle L.M.D, il donne une base générale essentielle pour la poursuite des études dans les années à venir, en acquérant les formalismes mathématiques de base en algèbre et en analyse, ainsi que leurs applications.

Le cours se compose d'un ensemble d'unités d'apprentissage qui permet aux étudiants non seulement de développer des compétences en mathématiques, mais surtout d'acquérir les compétences requises pour suivre les autres modules de la spécialité, qui sont basés sur les mathématiques.

Le cours est composé de six unités d'apprentissage (chapitres), l'ensemble de ces unités est décrit dans la figure suivante.



Prérequis

I

- Pour pouvoir suivre le cours de Mathématiques 1, il sera nécessaire d'avoir des compétences en mathématiques de niveau terminal.
- Afin de garantir le bon déroulement du cours, il est essentiel que les étudiants aient une connaissance approfondie du vocabulaire et des concepts mathématiques, ainsi que des compétences en formules mathématiques, en modes de raisonnement et en théorèmes de base.
  Dans la partie suivante on va donner un test de prérequis des des notions classiques de Mathématiques, veuillez cocher la ou les bonne(s) réponse(s) après avoir détaillé les calculs sur le brouillon.
- En cas d'échec au test des prérequis veuillez consulter le site suivant *https://mohamedkadhem.com /baccalaureat/*

Exercice : Test prérequis

II

Exercice : Question 1

Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$ alors :

- [ ] $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$
- [ ] $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = +\infty$
- [ ] $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = -\infty$
- [ ] On ne peux pas conclure pour la limite du produit

Exercice : Question 2

Le domaine de définition Df de la fonction $f(x) = ln(1 - x)$ est égal à :

- [ ] $\mathbb{R}$
- [ ] $]1, +\infty[$
- [ ] $] - \infty, 1[$
- [ ] $[1, +\infty[$

Exercice : Question 3

La dérivée de la fonction $f(x) = ln(4x - 2)$ est :

- [ ] $f'(x) = \dfrac{1}{x - 1}$
- [ ] $f'(x) = \dfrac{1}{4x - 2}$
- [ ] $f'(x) = \dfrac{2}{2x - 1}$

Chapitre : Algèbre linéaire

III

Dans ce chapitre, on présente le cours d'algèbre linéaire, il est composé de deux parties : dans la première partie on expose les espaces vectoriels ensuite, dans la deuxième partie, on présente les applications linéaire. Finalement, on donne quelques exercices sous forme de Q.C.M et de Q.C.U.

Notons que dans ce chapitre là, on se focalise uniquement sur les espaces vectoriels réels ; cependant, nous encourageons l'étudiant curieux à consulter le lien suivant *https://catalogue-biblio.univ-setif.dz/opac/index.php?lvl=notice_display&id=104457* pour en savoir davantage.

Objectifs du chapitre :

Ce chapitre vise à introduire les premiers éléments d'algèbre linéaire. Le cadre est celui des espaces vectoriels, les notions d'espace vectoriel et finalement les applications linéaires.

1. Espaces vectoriels

1.1. Définitions

Un espace vectoriel réel, est un ensemble F, dont les éléments sont appelés vecteurs, il est muni de deux lois : une loi interne noté et une multiplication par un réel, qu'on notera .

Les opérations et doivent vérifier les propriétés suivantes :

1/ La loi est commutative et associative , c'est-à-dire pour tous vecteurs

u, v et w de F:

$v + u = u + v.$

$(u + v) + w = u + (v + w).$

2/ La loi admet un élément neutre appelé vecteur nul, noté 0_F ou on le note 0, c'est à dire on a pour tout vecteurs u de F :

$0_F + u = u.$

3/ Tout vecteur u admet un opposé, que l'on note $-u$, c'est-à-dire :

$u + (-u) = 0_F.$

4/ La loi est distributive à gauche par rapport à la loi de F, c'est à dire pour chaque k dans $\mathbb{R}$ et pour tous u, v de F :

$k.(u + v) = (k.u) + (k.v)$

5/ La loi est distributive à droite par rapport à l'addition dans $\mathbb{R}$,

c'est-à-dire pour tous k_1, k_2 dans $\mathbb{R}$ et pour tout u de F on a :

$(k_1 + k_2).u = (k_1.u) + (k_2.u)$

6/ La loi est associative à droite par rapport à la multiplication dans $\mathbb{R}$, autrement dit pour tous k_1, k_2 dans $\mathbb{R}$ et pour tout u de F on a:

$(k_1k_2).u = k_1.(k_2.u)$

7/ Pour tout u de F on a :

$1.u = u$

Finalement, On dit alors que $(F, +, .)$ ou on dit tout simplement que F est un espace vectoriel.

Remarque

Pour simplifier, on notera par la suite ku au lieu de $k.u$.

Exemple

$\mathbb{R}^2$, muni des lois suivantes :

$(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2)$

$k(u_1, v_1) = (ku_1, kv_1)$

est un espace vectoriel.

1.1.1. Propriétés

Soit F un espace vectoriel, soit u un vecteur de F, et soit k appartenant à $\mathbb{R}$ alors :

1. $k0_F = 0_F$

2. $0u = 0_F$

3. $k(-u) = (-k)u = -ku$

4. $ku = 0_E$ implique que $k = 0$ ou $u = 0_F$

1.1.2. Sous-espace vectoriel

Soit $(F, +, .)$ un espace vectoriel, et soit E un ensemble inclut dans F, on dira que E est un sous-espace vectoriel (s. e. v) de F, si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

1. $(E, +, .)$ est un espace vectoriel.

2. $E \neq \emptyset$ et $\forall u, v \in E, \forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}, (k_1 u + k_2 v) \in E.$

3. $E \neq \emptyset$, $\forall u, v \in E, (u + v) \in E$ et $\forall u \in E, \forall k \in \mathbb{R}, ku \ \in E$

On favorise en particulier la deuxième propriété pour démontrer qu'un

sous ensemble E est un sous-espace vectoriel.

Remarque

Si $0_F \notin E$ alors E n'est pas un sous espace vectoriel.

1.1.3. Somme et somme directe

Définition : Somme

Soit F un espace vectoriel, F_1 et F_2 deux sous espaces vectoriels

de F. On appelle somme de F_1et F_2, le sous-ensemble de F noté $F_1 + F_2$, défini

par :

$$F_1 + F_2 = u \in F; u = u_1 + u_2 \text{ ou}, u_1 \in F_1 \text{et} u_2 \in F2$$

Proposition

$(F_1 + F_2)$ est un sous-espace vectoriel de F

Définition : Somme directe

Soit F un espace vectoriel, F_1 et F_2 deux sous espaces vectoriels

de F. On dit que F est une somme directe de F_1 et F_2, ou que F_1 et F_2 sont

supplémentaires l'un à l'autre dans F si et seulement si :

$F1 + F2 = F$ et $F_1 \cap F_2 = 0_F$

On note alors $F = F_1 \oplus F_2$

Proposition

F_1 et F_2 sont supplémentaires l'un à l'autre dans $F) \Leftrightarrow$

($\forall u \in F$ il existe un unique $u_1 \in F_1$ et il existe un unique $u_2 \in F_2$ tels que $u = u_1 + u_2$)

1.2. Base et dimension

Définition

Soit F un espace vectoriel et $u_1, u_2, u_3, ..., u_n$ n vecteurs de F. On

dit que $u_1, u_2, u_3, ..., u_n$ engendrent F, ou bien $\{u_1, u_2, u_3, ..., u_n\}$ est une famille

génératrice de F si et seulement si

$\forall u \in F$, il existe $k_1, k_2, ..., k_n \in \mathbb{R}$ tels que $u = k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 + ... + k_nu_n$

On dit aussi que tout élément de F peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $u_1, u_2, u_3, ..., u_n$.

Définition

Soit F un espace vectoriel et $u_1, u_2, u_3, ..., u_n$ n vecteurs de F. On

dit que $u_1, u_2, u_3, ..., u_n$ sont linéairement indépendants, ou bien $\{u_1, u_2, u_3, ..., u_n\}$ est une famille libre de F si et seulement si :

$(\forall k_1, k_2, k_3, ..., k_n \in R, k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 + ... + k_nu_n = 0_F) \Rightarrow$

$k_1 = k_2 = k_3 = ... = k_n = 0.$

si $u_1, u_2, u_3, ..., u_n$ ne sont pas linéairement indépendants on dit alors qu'ils sont

linéairement dépendants ou bien on dit que$u_1, u_2, u_3, ..., u_n$ est une famile liée.

Définition : Base

Soit F un espace vectoriel et $u_1, u_2, u_3, ..., u_n$ n vecteurs de F. On

dit que$\{u_1, u_2, u_3, ..., u_n\}$ est une base de F, si et seulement si $\{u_1, u_2, u_3, ..., u_n\}$

est une famille libre et génératrice de F.

Exemple

$\{(1, 0, 0, ..., 0), (0, 1, 0, ..., 0)...(0, 0, 0, ..., 1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$

dite base canonique.

Définition : Dimension

La dimension d'un espace vectoriel est égal au cardinal de sa

base. On note la dimension de F par $dimF$

Exemple

$dim\mathbb{R}^n = n$. Par convention, on pose $dim0_F = 0$.

2. Application linéaire

2.1. Définition

Définition

Soit F et E deux espaces vectoriels, et soit $f : F \to E$ une application.

On dit que f est une application linéaire si et seulement si

$\forall u_1, u_2 \in F, \forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}, f(k_1 u_1 + k_2 u_2) = k_1 f(u_1) + k_2 f(u_2)$

Remarque

Si $f : F \to E$ est une application linéaire alors on a $f(0_F) = 0_E$

2.2. Noyau et Image

Définition : Noyau

Soit $f : F \to E$ une application linéaire, On appelle noyau

de f l'ensemble noté $kerf$ qui est défini par

$kerf = \{u \in F; f(u) = 0_E\}$

Définition : Image

Soit $f : F \to E$ est une application linéaire, On appelle image

de f l'ensemble noté Imf qui est défini par

$Imf = \{v \in E; v = f(u) \; ; u \in F\} = f(F)$

Proposition

Soit $f : F \to E$ est une application linéaire, alors $kerf$ est

un s.e.v. de F, et Imf est un s.e.v. de E.

2.3. Matrice associée à une application linéaire

Définition

Soient F et E deux espaces vectoriels donnés, tels que $dimF = p$ et $dimE = k$,

et soit $f : F \to E$ une application linéaire.

Si $B_1 = \{v_1, v_2, ..., v_p\}$ une base de F, et $B_2 = w_1, w_2, ..., w_k$ une base de E

avec $f(v_i) = a_{1i}w_1 + a_{2i}w_2 + ... + a_{ki}w_k$ alors, on appelle matrice associée à f par rapport aux bases B_1 et B_2 notée $M(f, B_1, B_2)$ la matrice (k, p) dont les colonnes sont les coefficient a_{ij}

$$M(f, B_1, B_2) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & ... & a_{kp} \end{pmatrix}$$

Remarque

La matrice associée à la composée de deux applications est égale au produit des matrices associées a chaque applications.

Matrice de passage

Soit F un espace vectoriel, et soient $B_1 = v_1, v_2, ..., v_n$ et $B_2 = w_1, w_2, ..., w_n$

deux bases de F, chaque vecteur de la base B_2 peut s'écrire comme combinaison

linéaire des vecteurs de la base B_1

$w_j = a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + ... + a_{nj}v_n$ alors la matrice

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

s'appelle matrice de passage de B_2 à B_1, qui est notée $P = P_{B_1 \to B_2}$,

Remarque

Soit $M = P_{B_1 \to B_2}$ alors $P_{B_2 \to B_1} = M^{-1}$

Théorème

Soit F un espace vectoriel, et soient $B_1 = u_1, u_2, ..., u_n$ et

$B_2 = v_1, v_2, ..., v_n$ deux bases de F, avec $P_{B_1 \to B_2}$ et soit $X \in F$ tel que

$X = x_1u_1 + x_2u_2 + ... + x_nu_n$

et

$X = x'_1v_1 + x'_2v_2 + ... + x'_nv_n$

alors on a la relation suivante (dite de changement de coordonnées du vecteur X)

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Changement de base

Soient F et E deux espaces vectoriels donnés, tels que $dimF = p$ et $dimE = k$,

et soit $f : F \to E$ une application linéaire, avec $B_1 = u_1, u_2, ..., u_p$ et $B'_1 = u'_1, u'_2, ..., u'_p$ deux bases de$F$, et $B_2 = v_1, v_2, ..., v_k$ et $B'_2 = v'_1, v'_2, ..., v'_k$ deux bases de$E$.

On pose $M = M(f, B_1, B_2)$ et $M' = M(f, B'_1, B'_2)$.

On pose aussi $P = P_{B_1 \to B_2}$ et $P' = P_{B'_1 \to B'_2}$,

alors on a $M' = P'^{-1}MP$, cette relation est dite relation de changement de base.

Remarque

Dans le cas où on a la relation de changement de base suivante $M' = P^{-1}MP$

alors les deux matrices M et M' sont dites semblables.

3. Exercice

Exercice : Question 1

l'application $f\ : R^3 \to R^2$ définie par $f(x, y, z) = (x + y, x + z)$ est une application linéaire.

- vrai
- faux

Exercice : Question 2

Soit $u_1 = (1, 1)$ et $u_2 = (1, 0)$, alors $\{u_1, u_2\}$:

- Sont des vecteurs linéairement indépendants dans $\mathbf{R}^2$.
- Forme une famille génératrice dans $\mathbf{R}^2$.
- Forme une base dans $\mathbf{R}^2$.
- Forme une base dans .

Test de sortie

IV

Ci joint vous trouverez un test de sortie avec son corrigé.

[cf. res]

Bibliographie

Allab, Kada Eléments d'analyse : fonction d'une variable réelle- O.P.U., 2002.

Azoulay, Elie Problèmes corrigés de mathématiques - 2 éd.. - Paris : Dunod, 2002.

Baba-Hamed. C, Benhabib. K, Algèbre 1. Rappel de cours et exercices avec solutions. O.P.U., 1985.

Baba-Hamed. C, Benhabib. K, Analyse 1. Rappel de cours et exercices avec solutions. O.P.U., 1985.

Chambadal, L. Exercices et problèmes résolus d'analyse : mathématiques spéciales. Bordas, 1973.

Hitta, Amara Cours d'algèbre et exercices corrigés. O.P.U., 1994.

El-Hadi, M. S. Algèbre et Analyse.