Module : Mathématique L1-IST

Fiche de TD 2

Exercice 1 :

Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes

$$f(x) = \sqrt{\frac{2+3\,x}{5-2\,x}}\ ; \quad g(x) = \sqrt{x^2-2\,x-5}\ ; \quad h(x) = \ln(4\,x+3)$$

Exercice 2 :

Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes

$a)$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+2\,|x|}{x}$ $b)$ $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+2\,|x|}{x}$ $c)$ $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-3\,x+2}$

$d)$ $\lim\limits_{x\to \Pi} \dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}$ $e)$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$ $f)$ $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}$

$g)$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$ $h)$ $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^n-1}$.

Exercice 3 :

Étudier la continuité de f, la fonction réelle à valeurs réelles définie par $f(x) = (\sin x)/x$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

Exercice 4 :

Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = x^2 \cos\frac{1}{x} \ \text{ si } x \neq 0 \qquad f_1(0) = 0;$$

$$f_2(x) = \sin x \sin\frac{1}{x} \ \text{ si } x \neq 0 \qquad f_2(0) = 0;$$

$$f_3(x) = \frac{|x|\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1} \ \text{ si } x \neq 1 \qquad f_3(1) = 1.$$

Exercice 5 :

Dire si la fonction suivante est prolongeable par continuité à $\mathbb{R}$ tout entier:

$$f(x) = \sin(x-2)\ln|x-2| \text{ si } x \neq 2.$$

Exercice 6 :

Montrer que l'équation $\sqrt{1+x^2+x^4+x^6} = 3$ admet au moins deux solutions dans $\mathbb{R}$.

Exercice 7 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{1+\cos^2 x}.$$

Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, f' s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]a, a+2\pi[$.

Exercice 8 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définit par:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2}, & x \leq 1, \\ \dfrac{1}{x} & x \geq 1. \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe $c \in]0, 2[$ tel que $f(2) - f(0) = (2-0)f'(c)$.
2. Déterminer les valeurs de c.

Exercice 9 :

Vérifier

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \qquad \arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \operatorname{sgn}(x)\frac{\pi}{2}.$$

Exercice 10 :

Calculer :

$$\lim_{x\to\infty} e^x(\cosh^3 x - \sinh^3 x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\infty}(x - \ln(\cosh x)).$$

Exercice 11 :

Les réels x et y étant liés par

$$x = \ln\left(\tan\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right),$$

calculer $\cosh x, \sinh x$ et $\tanh x$ en fonction de y.