Module : Mathématique L1-IST

Examen S1

Exercice 1 :

Soit $f : E \to R (E, F \subset \mathbb{R})$ une fonction définit par:

$$f(x) = \frac{x+1}{2x-3}.$$

1. Donner les conditions sur E et F pour que f devienne une fonction bijective.
2. Déterminer sa fonction réciproque f^{-1}.

Exercice 2 :

Soit R une relation binaire définie sur R^* par:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^*, xRy \Leftrightarrow y(x^2+1) = x(y^2+1).$$

1. Montrer que R est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de 1.

Exercice 3 :

1/ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définit par:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}, & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur son domaine de définition.
2. Calculer la dérivée $f'(x)$ pour $x \neq 0$.
3. Donner le développement limité au voisinage $x_0 = 0$ à l'ordre $n = 4$ de la fonction $\sqrt{1-x^2}$.
4. En utilisant la question précédente, étudier la dérivabilité de f au point 0.

2/ Soit la fonction:

$$h(x) = Arcsin(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x})$$

.

1. Calculer $h'(x)$ pour $x \neq 0$.
2. En déduire le développement limité au voisinage de $x_0 = 0$ à l'ordre $n = 3$ de la fonction $h(x)$.

3. Calculer $\lim_{x \to 0} \dfrac{h(x) - \frac{x}{2}}{x^3}$.