Module : Mathématique **Examen S1 (Corrigé)** Durée : 1h20

Exercice 1 (5 Pts) :

Soit $f : E \to F$ $(E, F \subset \mathbb{R})$ une fonction définie par:

$$f(x) = \frac{x+1}{2x-3}.$$

1. Donner les conditions sur E et F pour que f devienne une fonction bijective.
2. Déterminer sa fonction réciproque f^{-1}.

Solution :

Soit la fonction $f(x) = \dfrac{x+1}{2x-3}$. Pour que f soit définie, il faut que :

$$2x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{3}{2} \implies E = \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{3}{2}\right\}. \boxed{0.5 \text{ pt(s)}}$$

1. **Injectivité** : $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}\backslash\{3/2\}, f(x_1) = f(x_2) \overset{?}{\Rightarrow} x_1 = x_2$. $\boxed{0.25 \text{ pt(s)}}$

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1+1}{2x_1-3} = \frac{x_2+1}{2x_2-3} &\Rightarrow (x_1+1)(2x_2-3) = (x_2+1)(2x_1-3) \\ &\Rightarrow 2x_1x_2 + 2x_2 - 3x_1 - 3 = 2x_1x_2 + 2x_1 - 3x_2 - 3 \quad \boxed{01 \text{ pt(s)}} \\ &\Rightarrow 5x_2 = 5x_1 \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \\ &\Rightarrow f \text{ est injective.} \end{aligned}$$

Pour trouver F, essayons de vérifier si f est surjective.

Surjectivité : $\forall y \in F, \exists x \in \mathbb{R}\backslash\{3/2\}, f(x) = y$. $\boxed{0.25 \text{ pt(s)}}$

$$\begin{aligned} y = \frac{x+1}{2x-3} \Leftrightarrow (2x-3)y = x+1 &\Leftrightarrow 2xy - x = 3y + 1 \\ &\Leftrightarrow x(2y-1) = 3y+1 \quad \boxed{01 \text{ pt(s)}} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3y+1}{2y-1}, \forall y \in \mathbb{R}\backslash\{1/2\}. \end{aligned}$$

Observons :

$$x = \frac{3}{2} \implies \frac{3y+1}{2y-1} = \frac{3}{2} \implies 6y + 2 = 6y - 3 \implies 2 = -3 \text{ (ce qui est impossible).}$$

donc effectivement, $x \in \mathbb{R}\backslash 3/2$. Nous venons de montrer que f est surjective. $\boxed{0.5 \text{ pt(s)}}$

Conclusion : f est bijective de $E = \mathbb{R}\backslash\{3/2\}$ vers $F = \mathbb{R}\backslash\{1/2\}$. $\boxed{0.5 \text{ pt(s)}}$

2. **Application réciproque** :

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R}\backslash\{1/2\} &\longrightarrow \mathbb{R}\backslash\{3/2\} \\ y &\longmapsto f^{-1}(y) = \frac{3y+1}{2y-1}. \quad \boxed{01 \text{ pt(s)}} \end{aligned}$$

Exercice 2 (5 Pts) :

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire définie sur $\mathbb{R}^*$ par:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^*, \quad x\mathcal{R}y \quad \Leftrightarrow \quad y\left(x^2+1\right) = x\left(y^2+1\right).$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de 1.

Solution :

Sur $\mathbb{R}^*$ on a:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^*, \quad x\mathcal{R}y \quad \Leftrightarrow \quad y\left(x^2+1\right) = x\left(y^2+1\right).$$

1. Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
   Réflexivité : $\forall x \in \mathbb{R}^*, x\mathcal{R}x$? $\boxed{0.25 \text{ pt(s)}}$

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}x \Leftrightarrow x\left(x^2+1\right) = x\left(x^2+1\right) &\Leftrightarrow x^3+x = x^3+x \\ &\Leftrightarrow x^3+x = x^2+x \quad \boxed{0.5 \text{ pt(s)}} \\ &\Leftrightarrow x^3-x^3 = x-x \\ &\Leftrightarrow 0=0. \end{aligned}$$

   Symétrie : $\forall x, y \in \mathbb{R}^*, x\mathcal{R}y \overset{?}{\Leftrightarrow} y\mathcal{R}x.$ $\boxed{0.25 \text{ pt(s)}}$

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}y &\Leftrightarrow y\left(x^2+1\right) = x\left(y^2+1\right) \\ &\Leftrightarrow x\left(y^2+1\right) = y\left(x^2+1\right) \quad \boxed{0.5 \text{ pt(s)}} \\ &\Leftrightarrow y\mathcal{R}x. \end{aligned}$$

   Transitivité : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^*, (x\mathcal{R}y)$ et $(y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z.$ $\boxed{0.5 \text{ pt(s)}}$

$$\left\{\begin{array}{c} x\mathcal{R}y \\ \text{et} \\ y\mathcal{R}z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y\left(x^2+1\right) = x\left(y^2+1\right) \Leftrightarrow y^2+1 = \dfrac{y(x^2+1)}{x} \cdots (\star) \\ \text{et} \\ z(y^2+1) = y(z^2+1) \cdots (\star\star) \end{array}\right. . \quad \boxed{1.5 \text{ pt(s)}}$$

   On remplace $(\star)$ dans $(\star\star)$:

$$z \cdot \frac{y\left(x^2+1\right)}{x} = y\left(z^2+1\right) \Rightarrow z\left(x^2+1\right) = x\left(z^2+1\right) \Leftrightarrow x\mathcal{R}z.$$

   D'où $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2. Classe d'équivalence : $\mathrm{Cl}(1) = \{y \in \mathbb{R}^* / y\mathcal{R}1\} = \{1\},$ $\boxed{0.5 \text{ pt(s)}}$
   car

$$y\mathcal{R}1 \Leftrightarrow 1 \cdot \left(y^2+1\right) = y\left(1^2+1\right) \Leftrightarrow y^2+1 = 2y \Leftrightarrow y^2-2y+1 = 0. \quad \boxed{1 \text{ pt(s)}}$$

   ! On a une solution double $x_1 = x_2 = 1$ (avec $\Delta = 0$).

Exercice 3 (10 Pts) :

I. Soit la fonction f définie par:

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{array}\right.$$

1. Montrer que la fonction f est continue sur son domaine de définition.
2. Calculer la dérivée $f'(x)$ pour $x \neq 0$.
3. Donner le développement limité au voisinage de $x_0 = 0$ à l'ordre $n = 4$ de la fonction $\sqrt{1-x^2}$.
4. En utilisant la question précédente, étudier la dérivabilité de f au point 0.
5. Peut-on appliquer le Théorème de Rolle à la fonction f sur l'intervalle $[-1, 1]$? Justifier votre réponse.

II. Soit la fonction :

$$h(x) = \text{Arcsin}\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right).$$

1. Calculer $h'(x)$ pour $x \neq 0$.
2. En déduire le développement limité au voisinage de $x_0 = 0$ à l'ordre $n = 3$ de la fonction $h(x)$.
3. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{h(x) - \frac{x}{2}}{x^3}$.

Solution :

Soit la fonction f définie par:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

I. 1. Continuité de f : $f(0) = 0$ $\boxed{0.25 \text{ pt(s)}}$.

f est continue sur $[-1, 0[\cup]0, 1]$ car c'est la composée de fonctions continues sur $[-1, 0[\cup]0, 1]$. $\boxed{0.25 \text{ pt(s)}}$

Pour $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-(1-x^2)}{x\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} = 0 = f(0), \quad \boxed{01 \text{ pt(s)}}$$

$$\Rightarrow f \text{ est continue en } 0,$$

$$\Rightarrow f \text{ est continue sur } [-1, 1].$$

2. Calcul de $f'(x)$ pour $x \neq 0$:

$$f'(x) = \left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}, \quad \forall x \neq 0. \ \boxed{01 \text{ pt(s)}}$$

3. Le $DL_4(0)$ de $\sqrt{1-x^2}$:

$$\sqrt{1-x^2} = (1 + \underbrace{(-x^2)}_{X})^{1/2}, \quad \text{avec } (1+X)^{1/2} = 1 + \frac{X}{2} - \frac{X^2}{8} + o(X^2) \ \boxed{0.5 \text{ pt(s)}}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4). \ \boxed{01 \text{ pt(s)}}$$

4. Dérivabilité de f : f est dérivable $[-1, 0[\cup]0, 1]$ comme composée de fonctions dérivables. $\boxed{0.25 \text{ pt(s)}}$

Pour $x = 0$:

$$\boxed{0.25 \text{ pt(s)}} \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-\left(1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}\right)}{x}}{x} \quad \boxed{01 \text{ pt(s)}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} + \frac{x^2}{8} = \frac{1}{2} = f'(0).$$

D'où f est dérivable au point 0 et donc dérivable sur $[-1,1]$.

II. Soit la fonction :

$$h(x) = \text{Arcsin}\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right).$$

1. La dérivé de $h(x)$:

$$h'(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^2}}. \quad \boxed{\text{01 pt(s)}}$$

2. Le $\text{Dl}_3(0)$ de $h(x)$:

$$\arcsin\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right) = \arcsin\left(\frac{x}{2}+\frac{x^3}{8}\right) = \frac{x}{2}+\frac{7x^3}{48}+o(x^3). \quad \boxed{\text{1.5 pt(s)}}$$

3. Calcule de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{h(x)-\frac{x}{2}}{x^3}$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{h(x)-\frac{x}{2}}{x^3} = \frac{\frac{x}{2}+\frac{7x^3}{48}-\frac{x}{2}}{x^3} = \frac{7}{48}. \quad \boxed{\text{1 pt(s)}}$$
