## المصفوفات:

### I) تعريف المصفوفة:

هي مجموعة منتهية من الأعداد الحقيقية مرتبطة في أسطر عددها $m$ وأعمدة عددها $n$.

**عددان صحيحان موجبان**

يرمز عادة للمصفوفة بالأحرف الكبيرة A, B, C,... ولعناصرها بالأحرف الصغيرة a,b,c، وترفق هذه العناصر بالدّليلين $i$ , $j$ حيث $i$ يدل على رقم السطر و$j$ يدلّ على رقم العمود أي:

$$A_{mn} = (\mathrm{a}_{ij}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots \\ \ldots & \ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots\ldots a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

ونقول أنّ المصفوفة A ذات البعد $(m \times)$

**درجة المصفوفة:**

إذا كانت لدينا $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ فإنّ أبعاد المصفوفة $m$ و $n$ تسمّى بدرجة المصفوفة:

- إذا كانت$m \neq n$ نقول أنّ المصفوفة من الدرجة $m \times n$
- إذا كانت $m = n$ نقول أنّ المصفوفة من الدرجة $n$
- إذا كانت $m > n$ نقول أنّ المصفوفة طويلة.
- إذا كانت $m < n$ نقول أنّ المصفوفة عريضة.

**المصفوفة الوحدوية:**

هي مصفوف مربعة قطرية فيها جميع عناصر القطر الرئيسي تساوي 1:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وتلعب المصفوفة الأحادية في المصفوفات الدّور نفسه الذي يلعبه الواحد في الأعداد الحقيقية ويرمز لها بـ$I_{n,m}$

**منقول المصفوفة:**

منقولها هو عبارة عن قلب الأسطر إلى أعمدة والأعمدة إلى أسطر ويرمز لها بـ $A'$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 6 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

**خصائص منقول المصفوفة:**

1- منقول مصفوفة هو عبارة عن المصفوفة الأصلية $(A')' = A$

2- $(A+B)' = A' + B'$

3- $(AB)' = A'\ B'$

4- $(\lambda A)' = \lambda(A')$ حيث λ عدد ما.

5- إذا كانت المصفوفة متناظرة فإنّ $A = A'$

**جمع وطرح المصفوفتين:**

يشترط أن يكون لهما نفس الدّرجة [لهما العدد نفسه من الأسطر والأعمدة].

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 8 & 9 & 10 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$A + B$ غير معرّفة لأنهما مختلفان في الدّرجة.

$B + C$ غير معرفة لأنهما مختلفان في الدرجة.

$A + C$ معرفة لأنهما لهما نفس الدرجة.

$$A + C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 8 & 9 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 13 & 7 & 11 \end{bmatrix}$$

عملية الجمع تبديلية وتجميعية.

المصفوفة الصفرية لها دور حيادي في جميع المصفوفات.

**ضرب المصفوفات**

$$\lambda = 6A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 5 & 10 & 9 \end{bmatrix}$$

$$6.A = \begin{bmatrix} 24 & 36 & 6 \\ 30 & 60 & 54 \end{bmatrix}$$

**ضرب مصفوفة بشعاع:**

$$A.B = ?$$

$$B = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} A = \begin{bmatrix}58 & 52 & 1\\26 & 58 & 3\\8 & 12 & 9\end{bmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix}58\times 1 + 52\times 2 + 1\times 3\\26\times 1 + 58\times 2 + 3\times 3\\8\times 1 + 12\times 2 + 9\times 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}165\\151\\59\end{bmatrix}$$

**ضرب مصفوفتين:**

$$B = \begin{bmatrix}2 & -1\\3 & 1\\1 & 0\\5 & -3\end{bmatrix} A = \begin{bmatrix}2 & -1 & 4 & 0\\0 & 1 & 3 & -1\\0 & 1 & -2 & 0\end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix}5 & -3\\1 & 4\\5 & -1\end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix}1 & 3\\3 & 1\\1 & 0\\2 & 2\end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\1 & 0 & 1\end{bmatrix} A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 4 & 1\\1 & 0 & 2 & 2\\2 & 1 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

$$A \times B =$$

**معكوس المصفوفة:**

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}.C.$$

$$A = \begin{bmatrix}6 & 3 & 1\\1 & 4 & -2\\4 & -1 & 5\end{bmatrix}$$

1- نحسب محدّد $|A|$:

$$|A| = 6\begin{vmatrix}4 & -2\\-1 & 5\end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix}1 & -2\\4 & 5\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}1 & 4\\4 & -1\end{vmatrix}$$
$$= 52$$

2- حساب C:

$$(6) \Rightarrow +1\begin{vmatrix}4 & -2\\-1 & 5\end{vmatrix} = 18$$
$$(1) \Rightarrow -1\begin{vmatrix}3 & 1\\-1 & 5\end{vmatrix} = -16$$

$$(4) \Rightarrow +1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -10$$

$$(3) \Rightarrow -1 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -13$$

$$(4) \Rightarrow +1 \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 26$$

$$(-1) \Rightarrow -1 \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 13$$

$$(1) \Rightarrow +1 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -17$$

$$(-2) \Rightarrow -1 \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 18$$

$$(5) \Rightarrow +1 \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 21$$

$$C = \begin{vmatrix} 18 & -16 & -10 \\ -13 & 26 & 13 \\ -17 & 18 & 21 \end{vmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} . C$$

$$= \frac{1}{52} \begin{vmatrix} 18 & -16 & -10 \\ -13 & 26 & 13 \\ -17 & 18 & 21 \end{vmatrix}$$