

Topographie routière [Raccordements Progressifs]

Raccordement de l'arc de cercle à la spirale

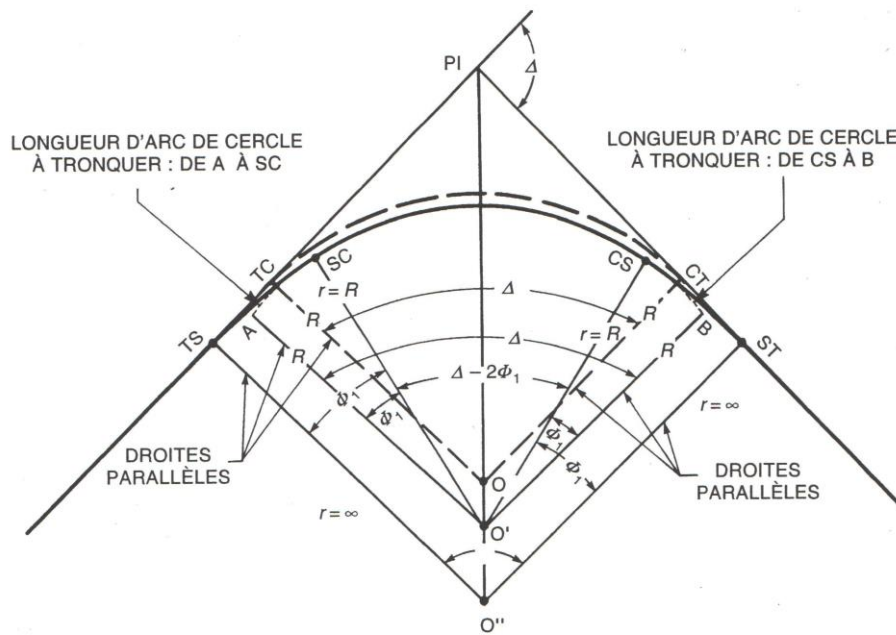


Figure 19.28 La méthode du déplacement radial de l'arc de cercle.

19.13.5 La théorie du raccordement

La figure 19.29 illustre la méthode du décalage de l'arc de cercle. Nous donnons ci-dessous la signification des symboles utilisés dans cette figure :

- TS = le point entre la tangente et la spirale d'entrée
- SC = le point entre la spirale et l'arc de cercle
- CS = le point entre l'arc de cercle et la spirale de sortie
- ST = le point entre la spirale de sortie et la tangente
- R = le rayon de l'arc de cercle
- L_s = la longueur de la spirale (suivant l'arc)
- cf = la contre-flèche
- t_l = la longue tangente de la spirale
- t_c = la courte tangente de la spirale
- C = la corde principale de la spirale
- d = le décalage de l'arc de cercle
- r = le rayon de courbure de la spirale en un point donné
- l = la distance entre un point et l'origine sur la spirale
- δ = l'angle de déviation d'un point donné de la courbe
- s = la distance entre le TS ou le ST et le prolongement du rayon jusqu'à la tangente principale

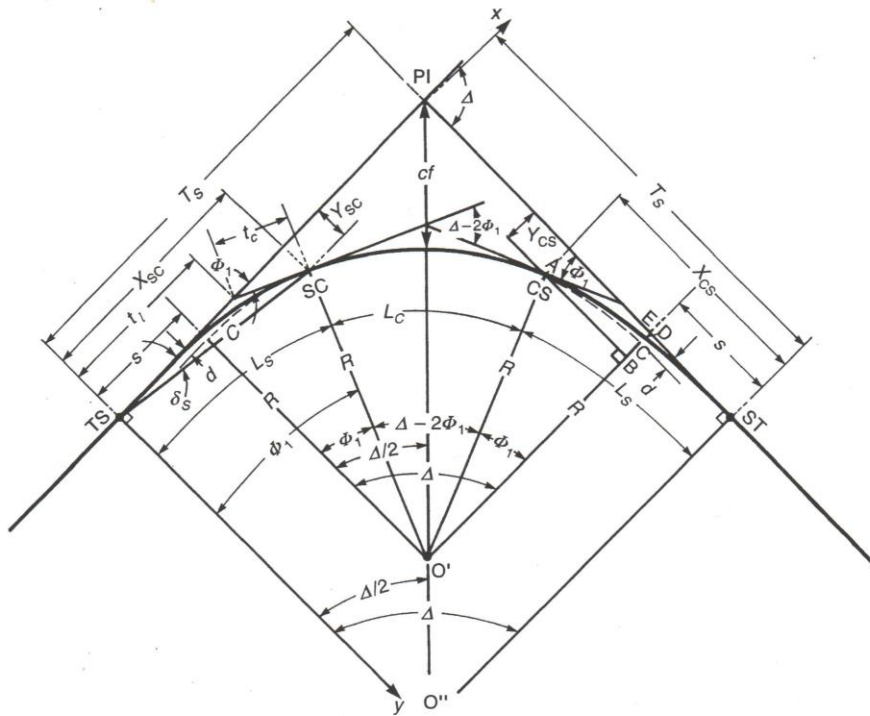


Figure 19.29 Le raccordement cercle-spirales.

Le segment \overline{CE} représente le décalage, d , de l'arc de cercle, d'où :

$$d = Y_{CS} - \overline{BC} \quad (19.49)$$

$$\overline{BC} = R - R \cos \Phi_1 \quad (19.50)$$

En développant le $\cos \Phi_1$ en série et en prenant $\Phi_1 = L_s/2R$, on obtient :

$$\cos \Phi_1 = 1 - L_s^2/8R^2 + L_s^4/384R^4 - \dots \quad (19.51)$$

En reportant le second terme de l'équation 19.51 dans l'équation 19.50, on a :

$$\begin{aligned} \overline{BC} &= R - R \left(1 - L_s^2/8R^2 + L_s^4/384R^4 - \dots \right) \\ &= L_s^2/8R - L_s^4/384R^3 + \dots \end{aligned} \quad (19.52)$$

Si on reporte le second terme des équations 19.52 et 19.38 dans l'équation 19.49, on obtient :

$$\begin{aligned} d &= L_s^2/6R - L_s^4/336R^3 + \dots - \left(L_s^2/8R - L_s^4/384R^3 + \dots \right) \\ &= \frac{L_s^2}{24R} - \frac{L_s^4}{2688R^3} + \dots \end{aligned} \quad (19.53)$$

La longueur de l'arc de cercle AC, qu'on doit tronquer à chacune de ses extrémités pour faire place à la spirale, est :

$$\text{arc AC} = R\Phi_1$$

Selon l'équation 19.33, on sait que :

$$L_S = 2R\Phi_1$$

d'où

$$\text{arc AC} = \frac{L_S}{2} \quad (19.54)$$

De plus, comme l'arc AC \cong l'arc AD, on peut considérer, en pratique, que le point D constitue le milieu de la spirale. Selon l'équation 19.36, on a :

$$Y_D = \frac{(L_S/2)^3}{6RL_S} - \frac{(L_S/2)^7}{336R^3L_S^3} + \frac{(L_S/2)^{11}}{42\,240R^5L_S^5} - \dots$$

$$Y_D = \frac{L_S^2}{48R} - \frac{L_S^4}{43\,008R^3} + \dots \quad (19.55)$$

Si on conserve le premier terme de l'équation 19.53 et le premier terme de l'équation 19.55, on obtient :

$$Y_D = \frac{d}{2} \quad (19.56)$$

Cela signifie que l'ordonnée du point milieu de la spirale a pour valeur la moitié de celle du décalage.

La tangente principale est :

$$T_S = (R + d) \operatorname{tg} \frac{\Delta}{2} + s \quad (19.57)$$

Or :

$$s = X_{CS} - \overline{AB} \quad (19.58)$$

$$\overline{AB} = R \sin \Phi_1$$

En développant le sin Φ_1 en série et en substituant $L_S/2R$ à Φ_1 , on a :

$$\overline{AB} = R \left(\frac{L_S}{2R} - \frac{L_S^3}{48R^3} + \dots \right) = \frac{L_S}{2} - \frac{L_S^3}{48R^2} + \dots$$

En reportant cette expression de \overline{AB} et l'équation 19.37 dans l'équation 19.58, on obtient :

$$s = L_S - \frac{L_S^3}{40R^2} + \dots - \left(L_S/2 - L_S^3/48R^2 + \dots \right)$$

$$= L_S/2 - L_S^3/240R^2 + L_S^5/34\,560R^4 - \dots \quad (19.59)$$

D'une part, la courbe tangente s'exprime ainsi :

$$t_c = \frac{Y_{sc}}{\sin \Phi_1} \quad (19.60)$$

Le report de l'équation 19.38 et de la valeur du $\sin \Phi_1$ dans l'équation 19.60 donne :

$$t_c = \frac{L_s^2/6R - L_s^4/336R^3 + \dots}{L_s/2R - L_s^3/48R^3 + \dots} = \frac{L_s}{3} + \frac{L_s^3}{126R^2} + \frac{L_s^5}{4882R^4} + \dots \quad (19.61)$$

D'autre part, la longue tangente correspond à :

$$t_l = X_{sc} - \frac{Y_{sc}}{\operatorname{tg} \Phi_1} \quad (19.62)$$

En développant la $\operatorname{tg} \Phi_1$ en série et en substituant le second terme des équations 19.37 et 19.38 dans l'équation 19.62, on a :

$$\begin{aligned} t_l &= L_s - \frac{L_s^3}{40R^2} + \dots - \frac{L_s^2/6R - L_s^4/336R^3 + \dots}{L_s/2R + L_s^3/24R^3 + \dots} \\ &= L_s - L_s^3/40R^2 + \dots - \left(\frac{L_s}{3} - \frac{17 L_s^3}{504R^2} - \dots \right) \\ &= \frac{2}{3} L_s + \frac{11 L_s^3}{1260R^2} + \frac{139 L_s^5}{665 280R^4} + \dots \end{aligned} \quad (19.63)$$

Quant à la corde principale de la spirale, elle équivaut à :

$$C = \frac{Y_{sc}}{\sin \delta_s} \quad (19.64)$$

Le développement du $\sin \delta_s$ en série et la substitution de l'équation 19.38 dans l'équation 19.64 donnent :

$$C = L_s - \frac{100 L_s^3}{9011R^2} + \frac{100 L_s^5}{97 237R^4} - \dots \quad (19.65)$$

La contre-flèche s'exprime comme suit :

$$cf = (R + d) \sec \frac{\Delta}{2} - R$$

ou encore

$$cf = (R + d) \sec \frac{\Delta}{2} - (R + d) + d$$

d'où

$$cf = (R + d) \left(\sec \frac{\Delta}{2} - 1 \right) + d \quad (19.66)$$

Enfin, la longueur de l'arc de cercle correspond à :

$$L_c = \frac{\pi R}{180^\circ} (\Delta^\circ - 2\Phi_1^\circ) \quad (19.67)$$

Dans l'exemple 19.10, nous présentons des calculs relatifs à ces divers éléments et, dans l'exemple 19.11, nous effectuons le chaînage de points caractéristiques.

Enfin, la longueur de l'arc de cercle correspond à :

$$L_c = \frac{\pi R}{180^\circ} (\Delta^\circ - 2\Phi_1^\circ) \quad (19.67)$$

Dans l'exemple 19.10, nous présentons des calculs relatifs à ces divers éléments et, dans l'exemple 19.11, nous effectuons le chaînage de points caractéristiques.

Théodolite installé sur un point intermédiaire. La spirale théorique se compose d'un nombre infiniment grand d'arcs de cercle infiniment petits. À chacun de ses points, la spirale a un rayon de courbure r particulier (art. 19.13.2), et le cercle engendré par ce rayon au point de la courbe se nomme cercle osculateur (fig. 19.30).

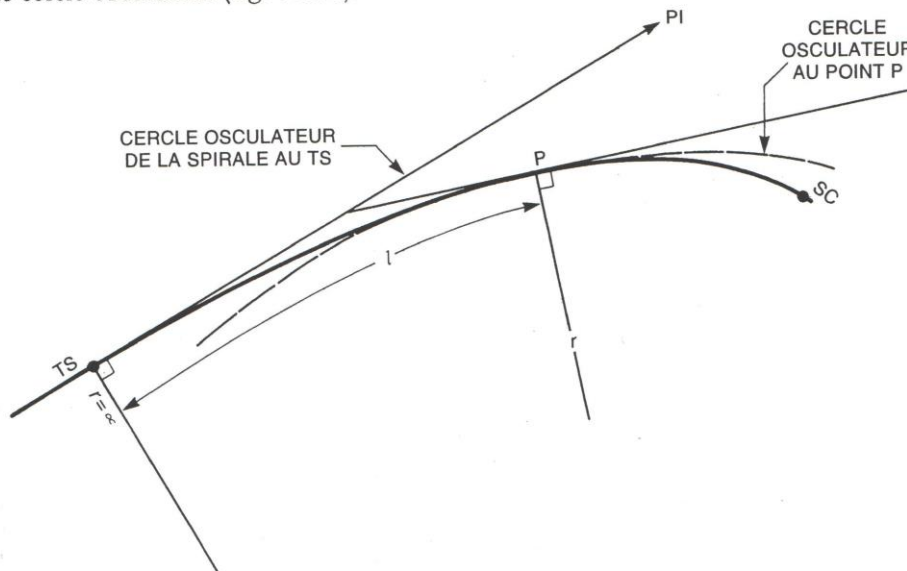


Figure 19.30 Le cercle osculateur en un point de la spirale.

Caractéristique. Une propriété très importante de la spirale est qu'elle s'éloigne du cercle osculateur concerné, en un point donné de celle-ci, selon le même angle que celui de sa tangente à l'origine (TS), et ce pour une même distance.

Dans la figure 19.31, prenons des arcs égaux par construction :

$$\text{arc PB} = \text{arc PC} = \text{arc TS} \text{ à } H = l_1$$

Le théodolite est en station sur le point P. On effectue une visée arrière, par exemple sur le point B de la spirale. L'angle nécessaire pour qu'on puisse revenir dans la direction de la tangente au point P équivaut à :

$$\angle BPA = \angle CPA - \angle BPC$$

On sait que :

$$\angle CPA = \delta_c = \frac{90^\circ l_1}{\pi r} \text{ (cercle osculateur)}$$

$$\text{où } r = \frac{RL_s}{l}$$

On sait également que :

$$\angle BPC = \delta_H \text{ (propriété de la spirale théorique, fig. 19.31)}$$

d'où

$$\delta_H = \delta_s \left(l_1 / L_s \right)^2$$

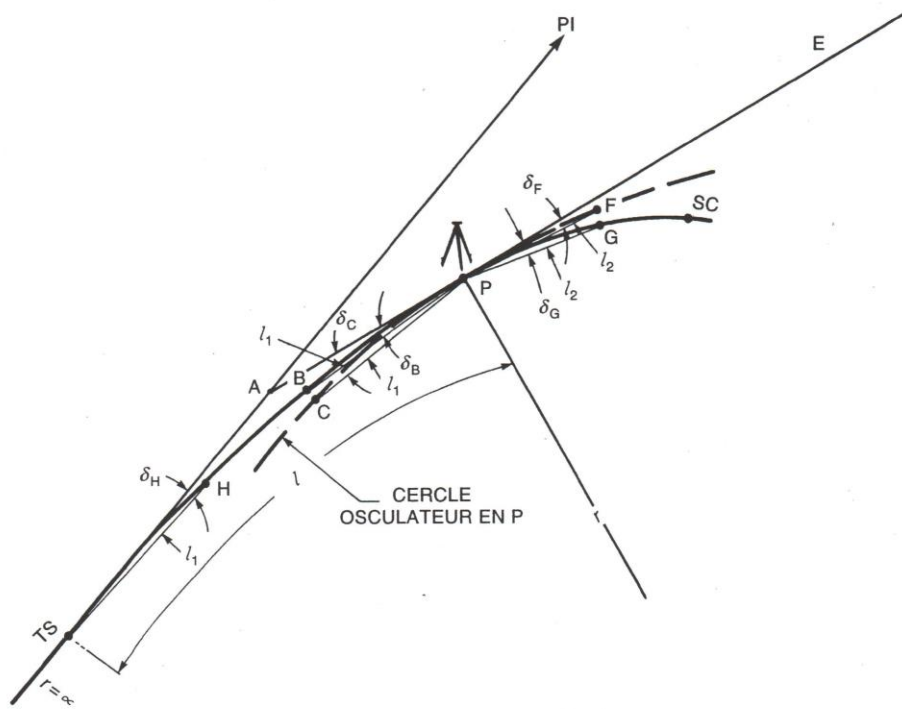


Figure 19.31 Le théodolite installé sur un point intermédiaire de la spirale.

Par conséquent :

$$\angle BPA = \delta_{P-B} = \frac{90^\circ l_1}{\pi r} - \delta_s \left(\frac{l_1}{L_s} \right)^2$$

Si on prend une distance l_2 de l'autre côté, soit vers le SC, l'angle pour placer un point de la spirale à partir de la tangente au point P est alors :

$$\begin{aligned} \angle EPG &= \angle EPF + \angle FPG \\ &= \frac{90^\circ l_2}{\pi r} + \delta_s \left(\frac{l_2}{L_s} \right)^2 \end{aligned} \quad (19.68)$$

Pour implanter un point de la spirale à partir d'un point intermédiaire, on fait la visée arrière sur le point connu. On tourne la lunette de l'angle de déviation calculé pour ce point, ce qui donne la direction de la tangente. Par la suite, on bascule la lunette et on la tourne de l'angle de déviation calculé pour le point avant. L'angle total tourné représente la somme des angles de déviation.

Si les points considérés sont de part et d'autre et à égale distance du point intermédiaire, la somme des angles de déviation devient :

$$\begin{aligned} \delta_{P-B} + \delta_{P-G} &= \frac{90^\circ l_i}{\pi r} - \delta_s \left(\frac{l_i}{L_s} \right)^2 + \frac{90^\circ l_i}{\pi r} + \delta_s \left(\frac{l_i}{L_s} \right)^2 \\ &= \frac{180^\circ l_i}{\pi r} \end{aligned} \quad (19.69)$$

où l_i = la longueur de la visée arrière et de la visée avant

$$r = \frac{RL_s}{l} \quad (l = \text{la longueur entre P et le TS})$$

L'exemple 19.12 présente le calcul du chaînage et des angles de déviation dans un cas de raccordement spirales théoriques-cercle.

Exercice 1

Calculer les angles de déviation pour piqueter une spirale théorique de 100 m sachant que le rayon de l'arc de cercle est égal à 350 m.

Exercice 2

- (1) Pour un raccordement cercle-spirales, calculer la tangente principale, T_s , la corde principale de la spirale, C , la contre-flèche, cf , la longue tangente, t_l , et la courte tangente, t_c , compte tenu que le rayon de l'arc de cercle $R = 350$ m, $L_s = 100$ m et $\Delta = 50^\circ$.
- (2) Si le chaînage du PI est de $1 + 814,830$, calculer le chaînage des points caractéristiques TS , SC , CS et ST .

Exercice 3

On doit relier par un raccordement spirales théoriques-cercle deux alignements d'une route à deux voies, sur laquelle la vitesse de base est de 100 km/h. Si le chaînage du $PI = 2 + 050,000$, $\Delta = 40^\circ$ et le rayon R de l'arc = 500 m, calculer le chaînage des points caractéristiques et les angles de déviation qui permettront de piqueter cette courbe.

