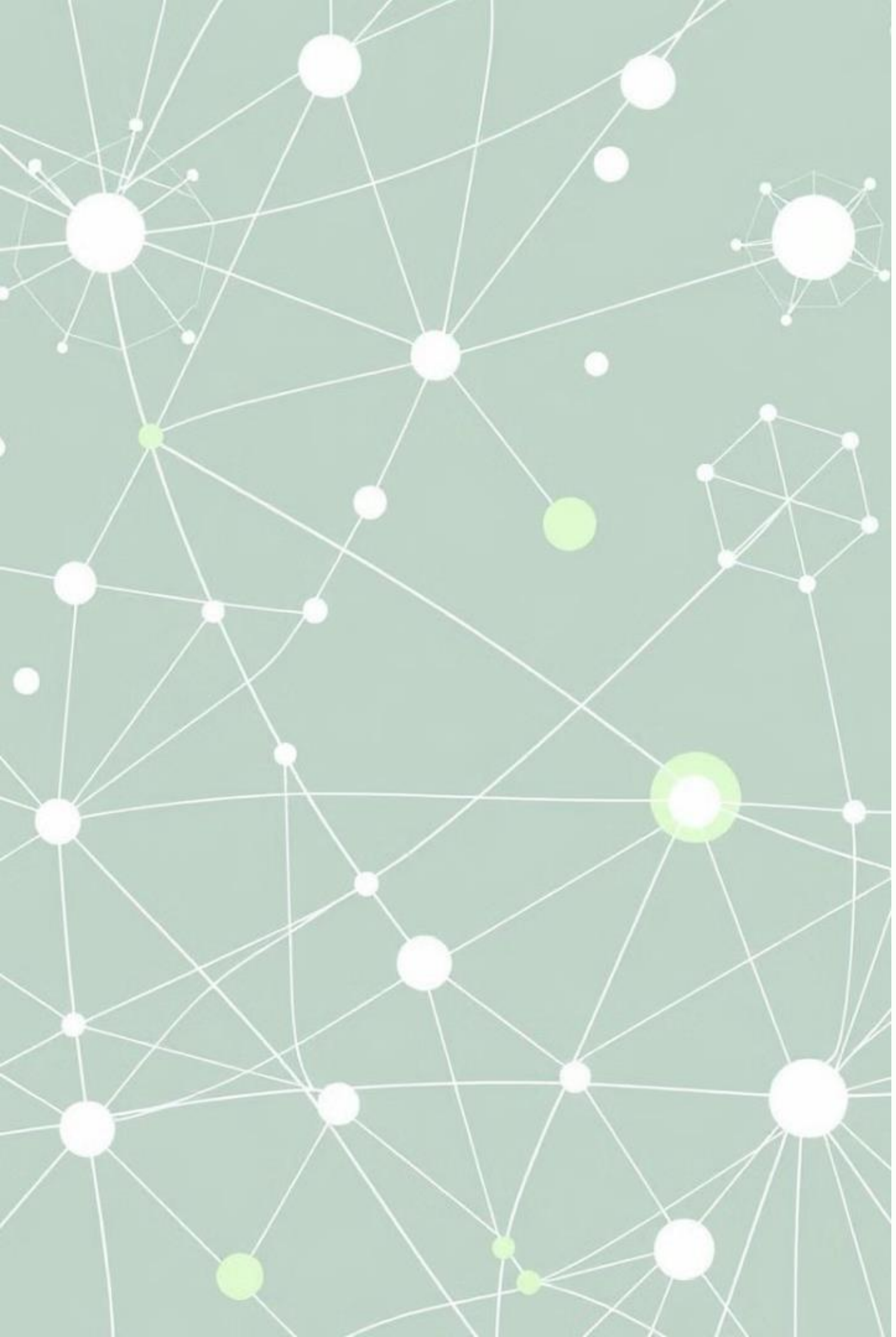


Introduction à la Programmation Linéaire

Ce chapitre propose un rappel des concepts fondamentaux, des formulations mathématiques et des approches de résolution de la programmation linéaire.

L **par Lamia Triqui**

Formulation de la Programmation Linéaire

Variables de Décision

Les variables de décision sont les inconnues que nous cherchons à déterminer.

Fonction Objectif

La fonction objectif est une fonction linéaire à maximiser ou minimiser.

Contraintes

Les contraintes sont des systèmes d'inégalités ou d'égalités linéaires que les variables doivent respecter.

Exemple Classique : Problème de Production

Variables de décision	x_1 : Nombre d'unités de A produites	x_2 : Nombre d'unités de B produites
Fonction objectif	Maximiser le profit $P = 40x_1 + 50x_2$	
Contraintes	Ressources limitées : $2x_1 + x_2 \leq 100$	Temps de production : $x_1 + 3x_2 \leq 90$
Non-négativité	$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$	

Modèle Mathématique Généralisé

Maximiser (ou minimiser) $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$ c 1 x 1 +c 2 x 2 +⋯+c n x n .

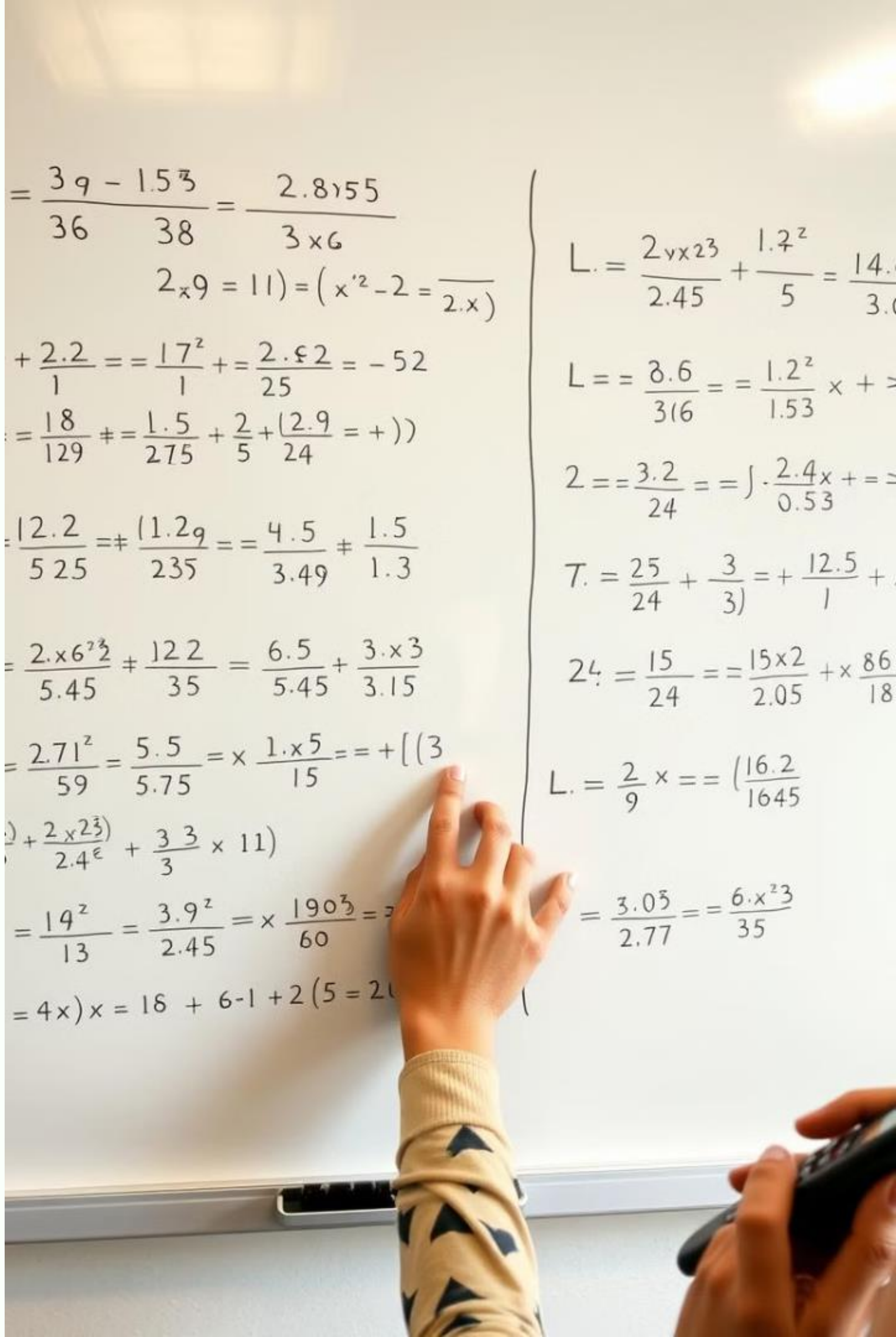
Sous contraintes :

$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n \leq b_1$, a 11 x 1 +a 12 x 2 +⋯+a 1n x n ≤b 1 ,

$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n \leq b_2$, a 21 x 1 +a 22 x 2 +⋯+a 2n x n ≤b 2 ,

…

$x_i \geq 0, \forall i$. x i ≥0,∀i.



Approches de Résolution

1 *Méthodes Graphiques*

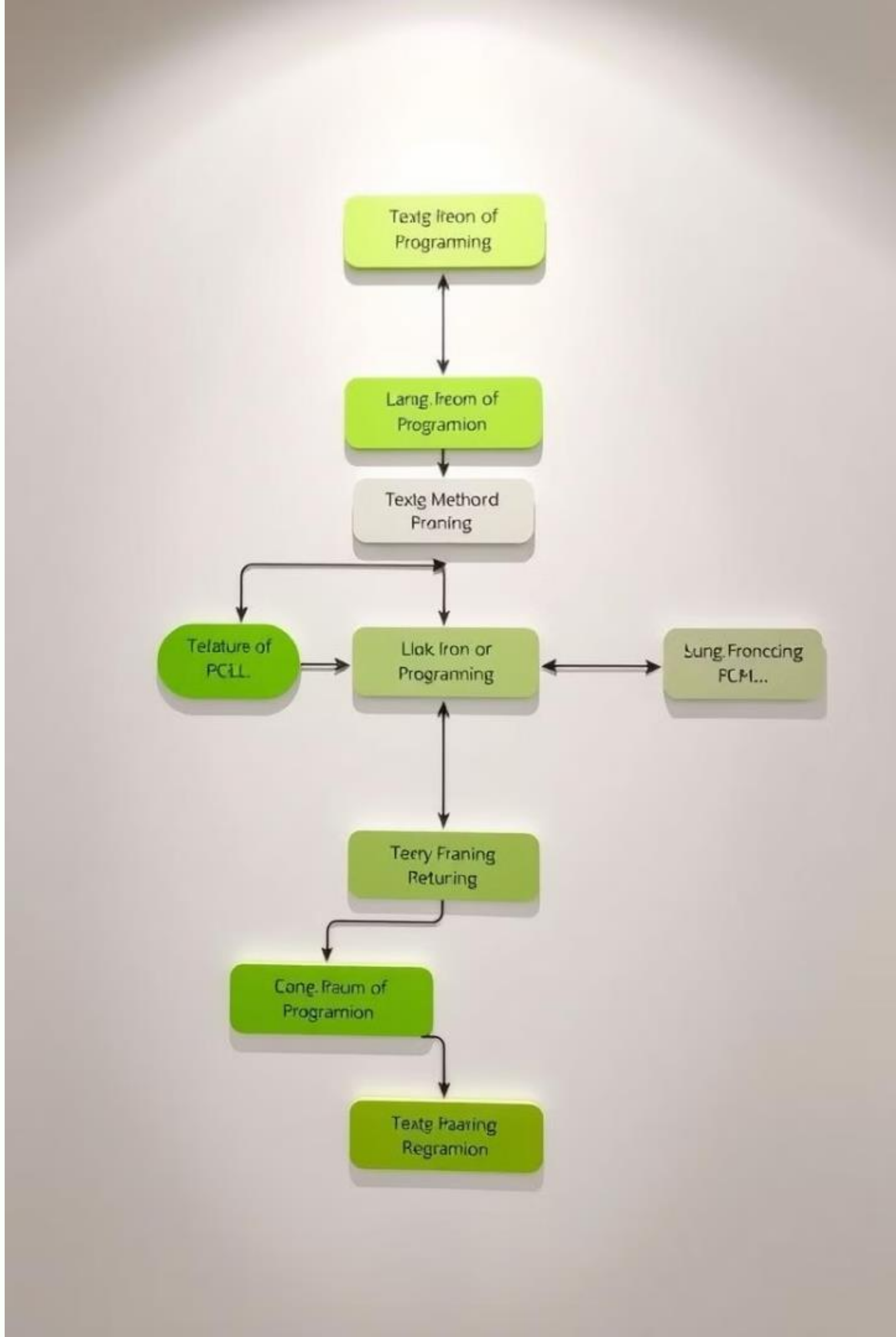
Pour les problèmes à deux variables, on peut tracer les contraintes sous forme de droites et identifier la région admissible.

2 *Méthode du Simplexe*

Pour les problèmes à $n>2$ variables, on navigue parmi les sommets de la région admissible pour trouver la solution optimale.

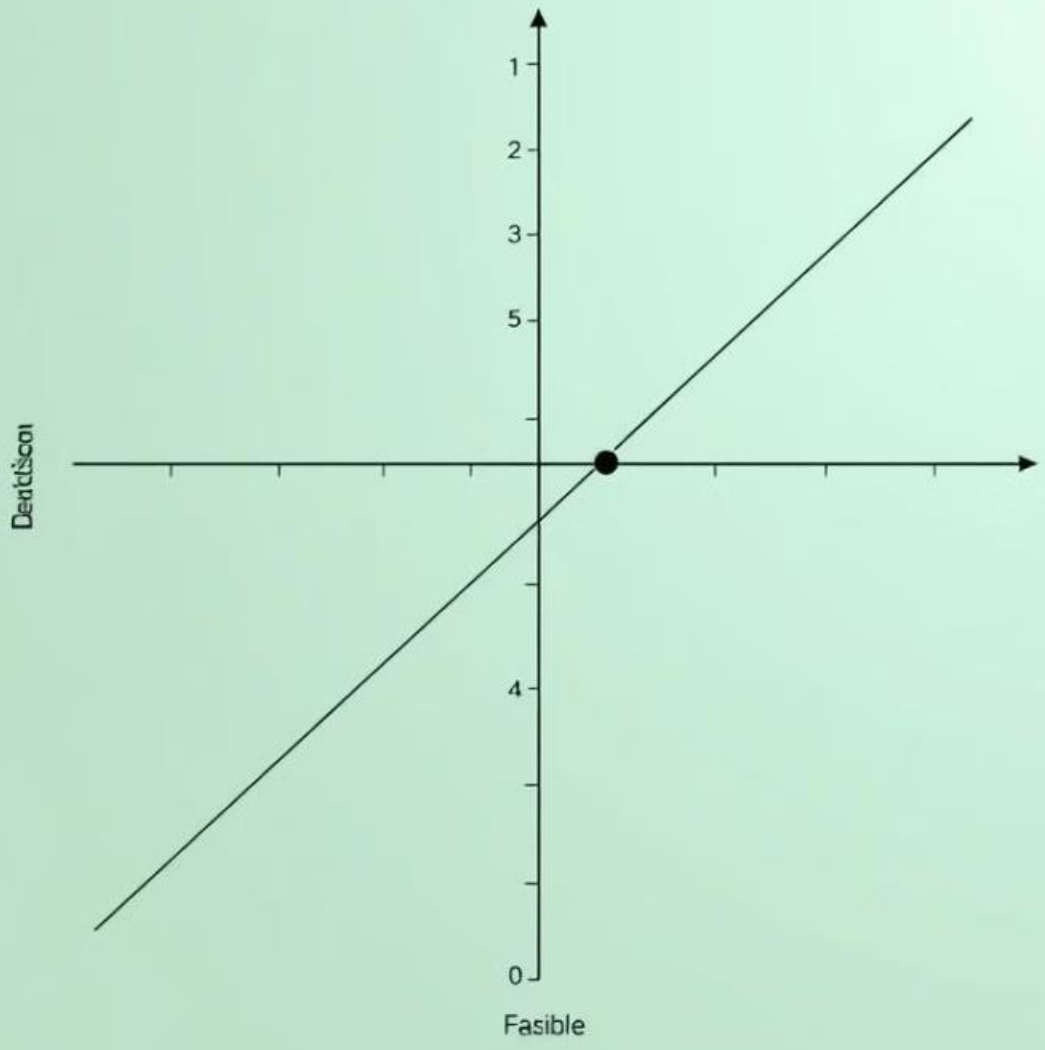
3 *Outils Numériques*

Des logiciels comme Excel Solver, Python (PuLP, SciPy) ou MATLAB permettent de résoudre des problèmes de grande taille.



Résolution Graphique : Exemple

Avec les contraintes : $x_1 + x_2 \leq 6$, $2x_1 + x_2 \leq 8$, $x_1 , x_2 \geq 0$, $x_1 + x_2 \leq 6, 2x_1 + x_2 \leq 8, x_1, x_2 \geq 0$, et la fonction objectif $P = 3x_1 + 4x_2$ $P=3x_1 + 4x_2$, résoudre graphiquement.



Méthode du Simplexe : Étapes

1

Formulation standard

Introduire des variables d'écart pour transformer les contraintes en égalités.

2

Tableau initial

Construire un tableau simplexe initial avec les coefficients de la fonction objectif et des contraintes.

3

Itérations

Appliquer des itérations pour améliorer la solution en sélectionnant une variable d'entrée et une variable de sortie.

4

Conditions d'arrêt

Vérifier les conditions d'arrêt pour déterminer si la solution optimale a été trouvée.

Conclusion

La programmation linéaire est un outil essentiel pour résoudre des problèmes réels en optimisation. Les méthodes graphiques et le simplexe permettent d'aborder des problèmes simples et complexes. L'utilisation d'outils numériques est nécessaire pour la résolution de problèmes de grande taille.