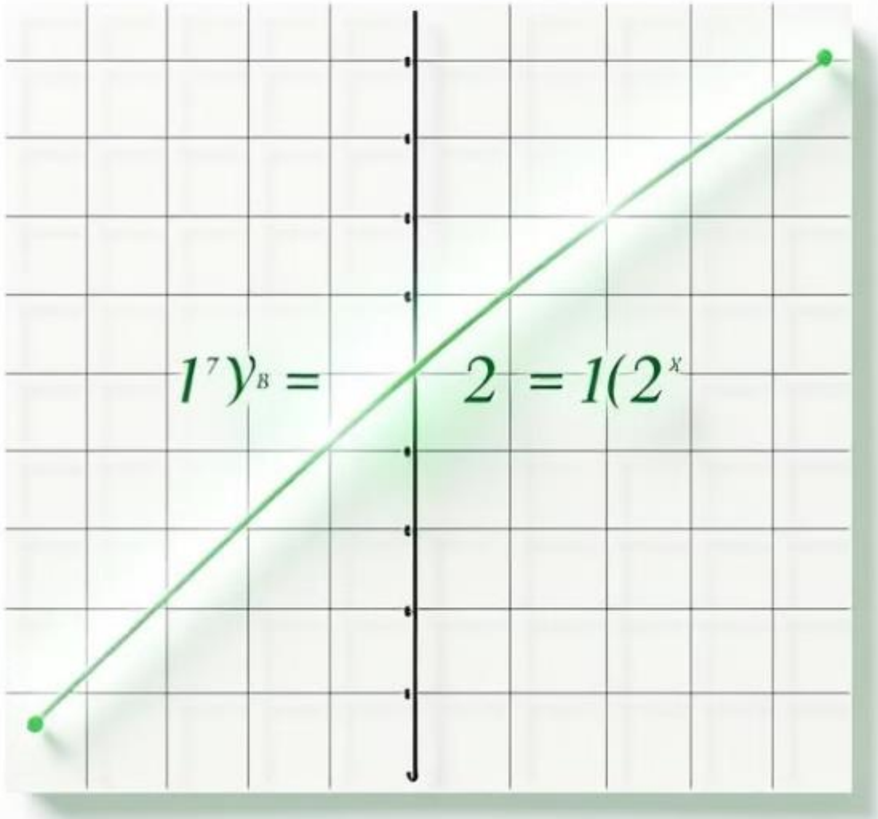


Notions de Calcul Différentiel: Introduction

Bienvenue à cette présentation sur les notions de calcul différentiel, un domaine fascinant et essentiel en mathématiques.

Ce chapitre explorera les concepts fondamentaux de l'optimisation, de la différentiabilité, de la convexité, et de l'indépendance linéaire.

Ensemble, nous allons démystifier ces notions et les illustrer avec des exemples concrets.

L **par Lamia Triqui**

Objectifs et Normes

Objectifs

A la fin de cette présentation, vous serez en mesure de comprendre les notions clés du calcul différentiel, y compris l'optimisation, la différentiabilité, la convexité et l'indépendance linéaire.

Normes

Nous allons commencer par introduire les différentes normes utilisées en analyse vectorielle, telles que la norme 1, la norme euclidienne et la norme infinie.

Fonction Radiale

La notion de fonction radiale est un outil puissant pour simplifier l'étude de certaines fonctions multivariées.

En utilisant les coordonnées polaires, sphériques ou hypersphériques, nous pouvons exprimer une fonction multivariée comme une fonction d'une seule variable, ce qui simplifie son analyse.

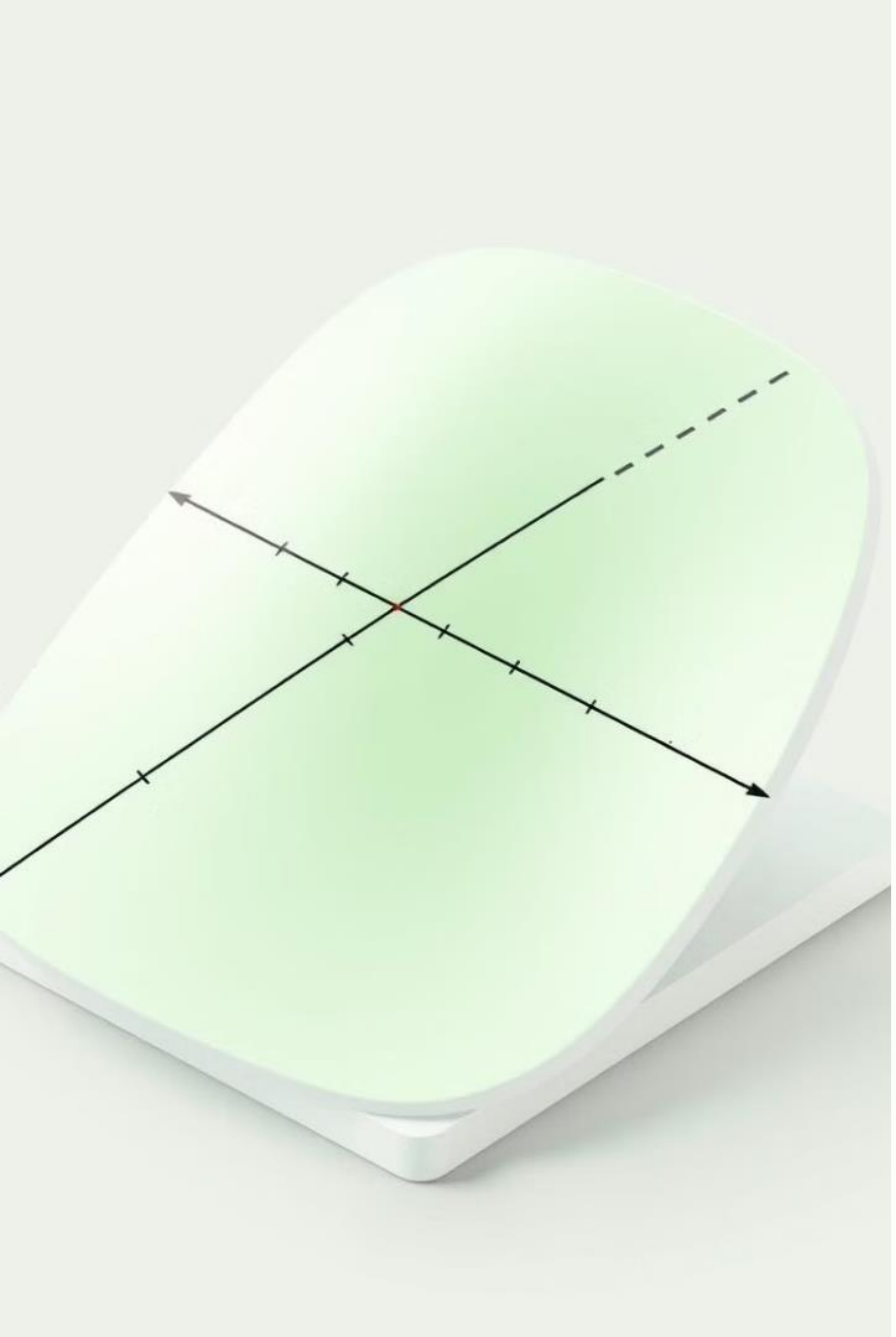
Exemple : $f(x,y) = x^2 + xy - 1$ peut être exprimée en coordonnées polaires comme $\Phi f(r, \theta) = r^2(\cos^2\theta + \cos\theta\sin\theta) - 1$.

Continuité et Limites

La continuité d'une fonction est un concept fondamental en analyse. Une fonction continue est une fonction dont la valeur ne change pas brusquement lorsque l'argument varie légèrement.

La limite d'une fonction en un point est la valeur vers laquelle la fonction tend lorsque l'argument se rapproche de ce point.

Pour les fonctions multivariées, nous pouvons utiliser la fonction radiale pour déterminer la limite en un point ou à l'infini.



Rappel sur la Différentiabilité

La différentiabilité est un concept important en analyse mathématique qui permet de décrire comment une fonction change localement autour d'un point.

Une fonction différentiable est une fonction dont la dérivée existe en tout point de son domaine.

Le gradient et la matrice Hessienne sont des outils essentiels pour étudier les fonctions différentiables.

Rappel d'Algèbre Linéaire

Déterminant Mineur Principal

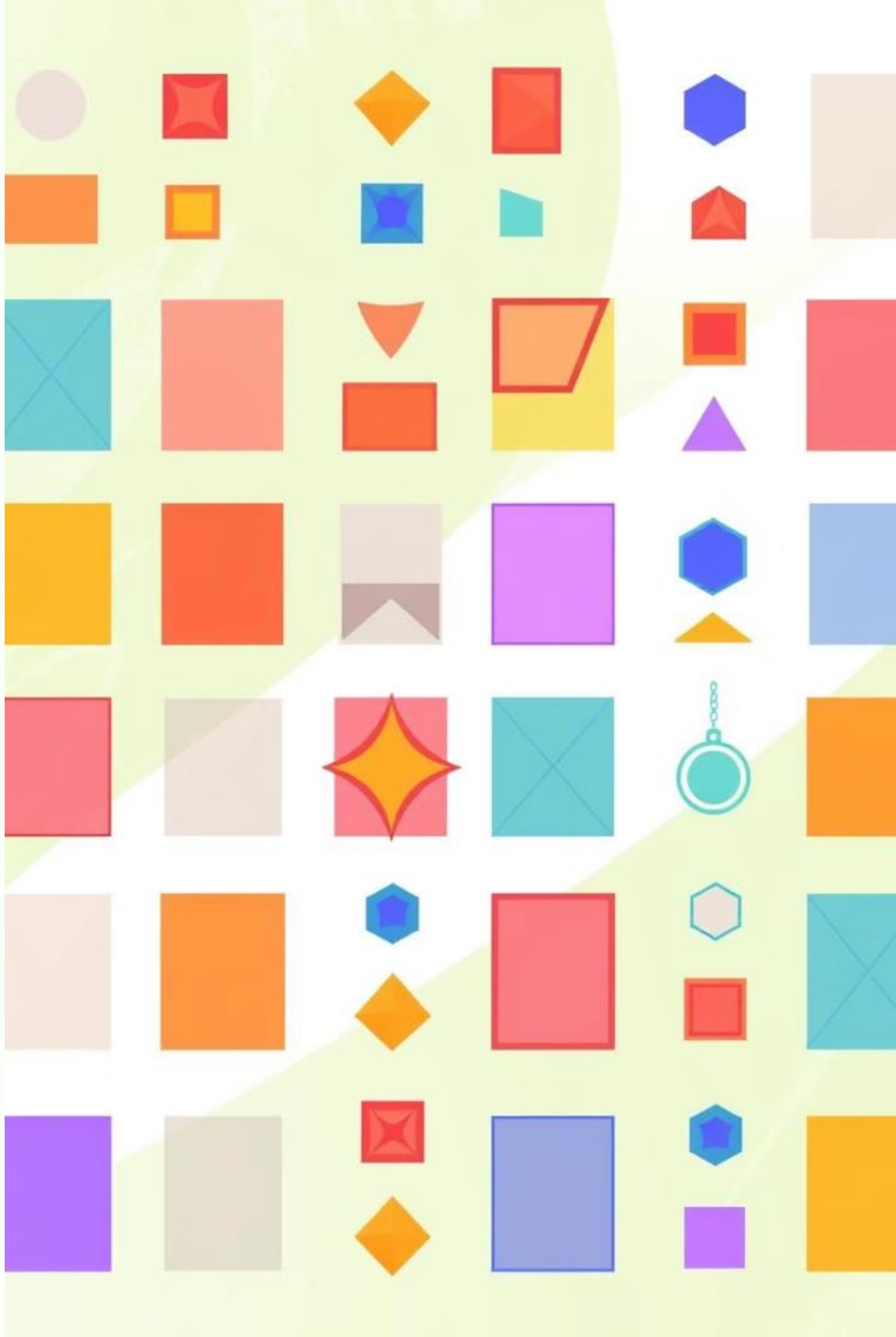
Le déterminant mineur principal d'une matrice est un déterminant d'une sous-matrice obtenue en sélectionnant un certain nombre de lignes et colonnes.

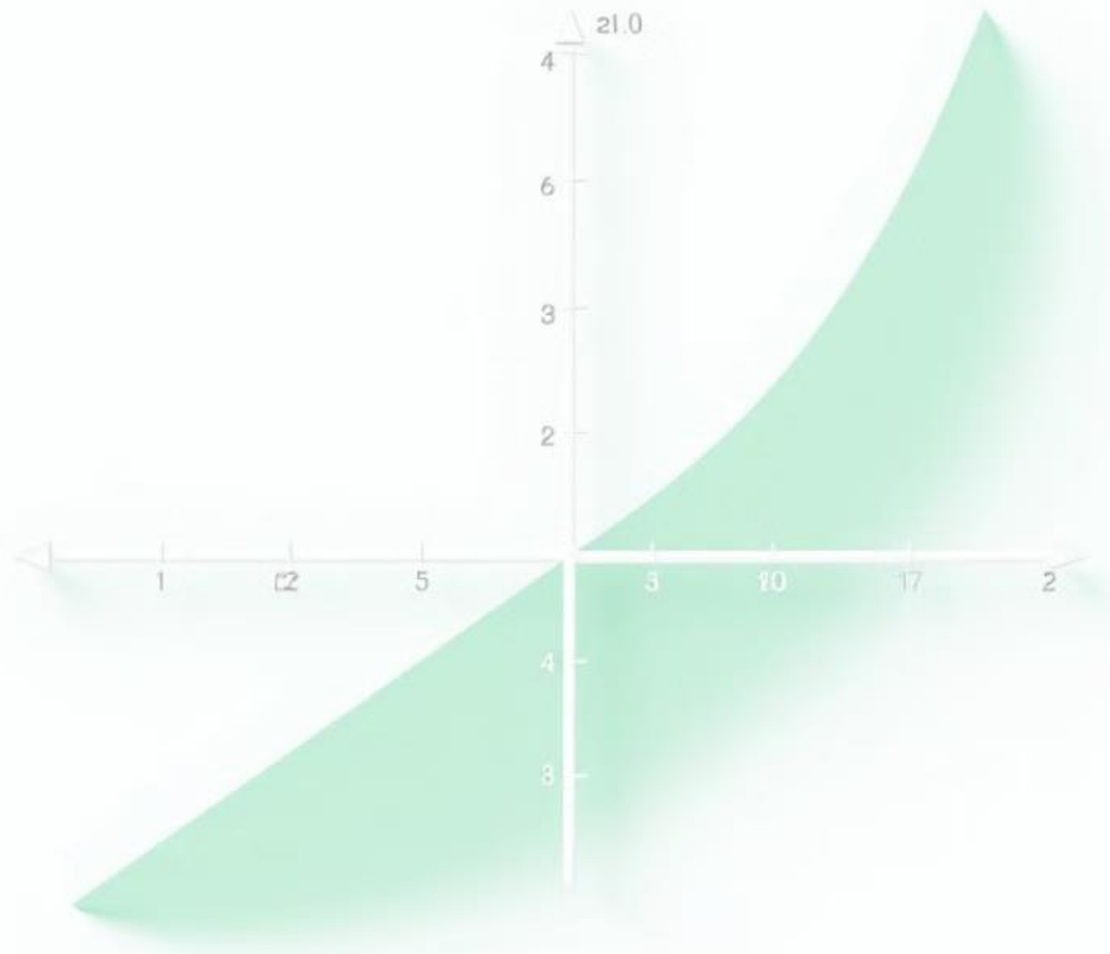
Matrice Symétrique

Une matrice symétrique est une matrice dont les éléments diagonaux sont égaux et les éléments non-diagonaux sont égaux.

Nature d'une Matrice

Une matrice symétrique peut être définie positive, semi-définie positive, définie négative ou semi-définie négative, selon la valeur des déterminants mineurs principaux.

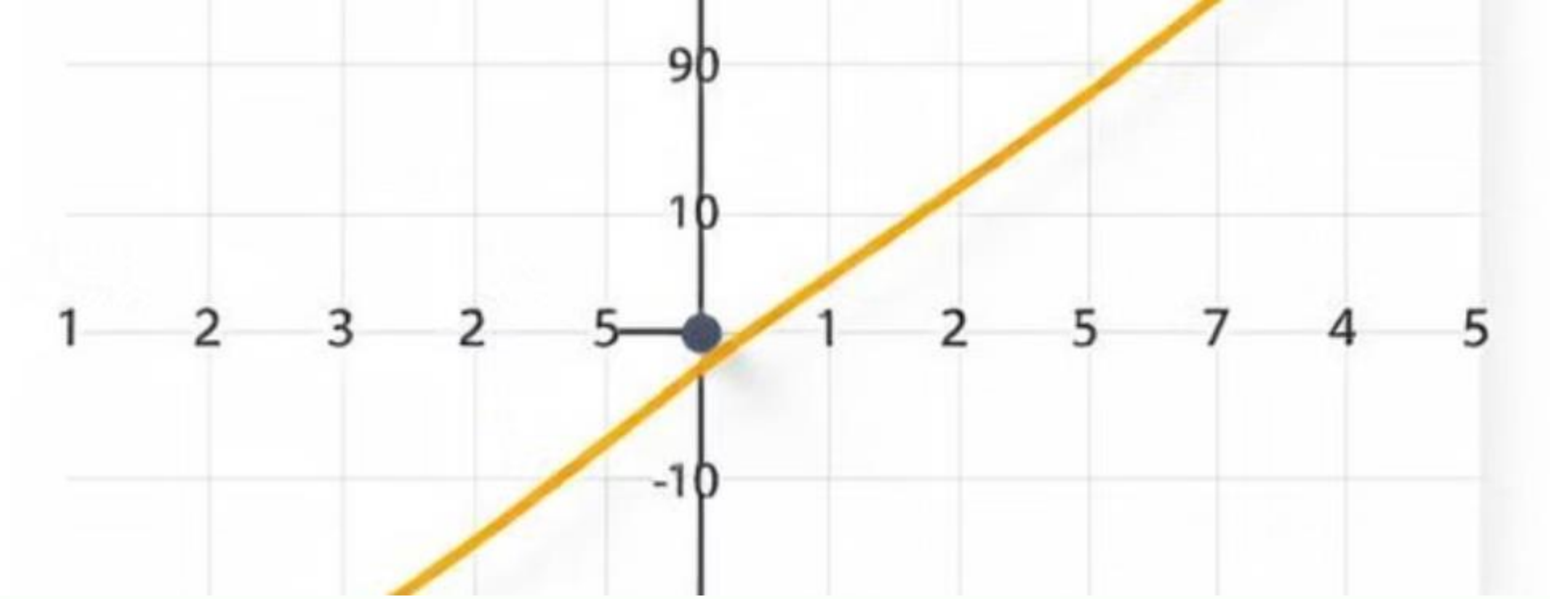




Rappel sur la Convexité

Un ensemble est convexe si le segment de droite qui relie deux points quelconques de l'ensemble est entièrement contenu dans l'ensemble.

Une fonction est convexe si son graphe se trouve au-dessus de toute droite tangente à son graphe. Une fonction est strictement convexe si le graphe se trouve strictement au-dessus de toute droite tangente.

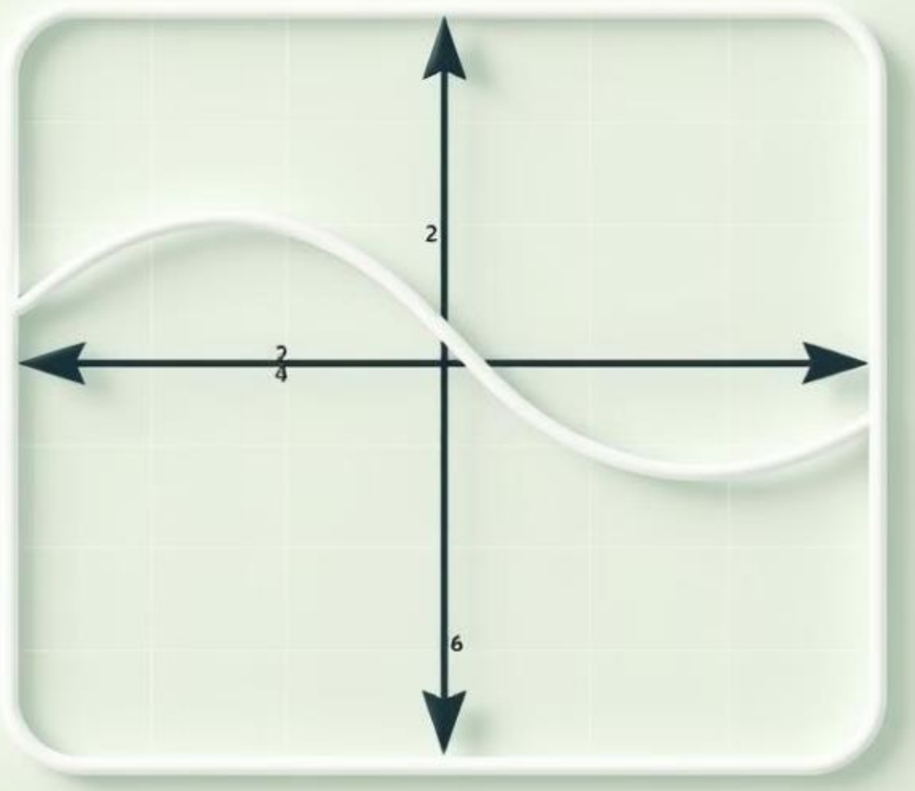


Point Critique d'une Fonction

Un point critique d'une fonction est un point où le gradient de la fonction est nul.

Les points critiques peuvent correspondre à des minima, des maxima ou des points de selle de la fonction.

Exemple : $f(x,y) = x^2 + y^2$ a un point critique en $(0,0)$ qui est un minimum global.



Rappel sur la Coercivité

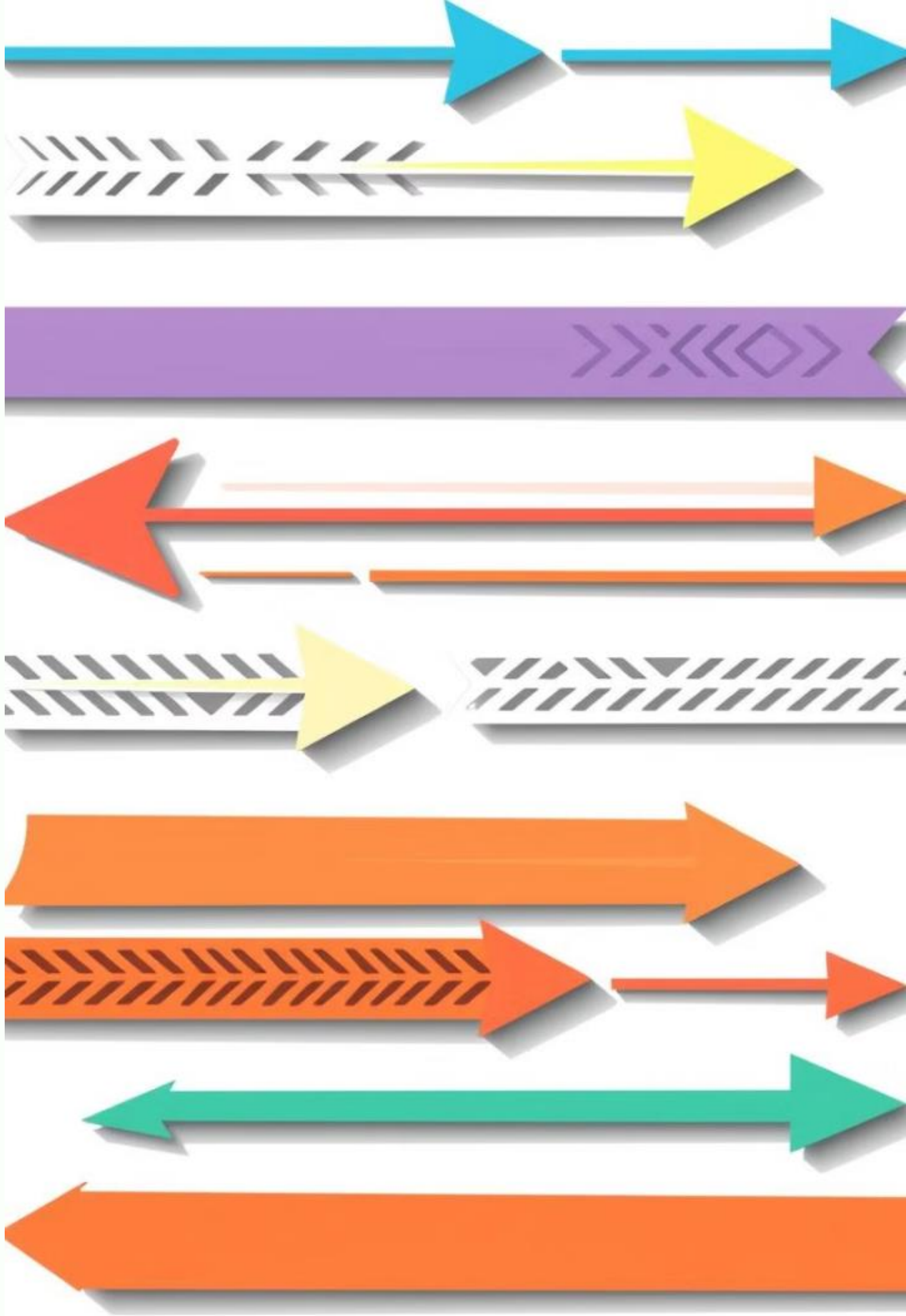
Une fonction est coércive si sa valeur tend vers l'infini lorsque l'argument tend vers l'infini.

Exemple : $f(x,y) = x^2 + y^2$ est coércive car sa valeur tend vers l'infini lorsque x ou y tend vers l'infini.

Rappel sur l'Indépendance Linéaire

Un ensemble de vecteurs est linéairement indépendant si aucun vecteur de l'ensemble ne peut être exprimé comme une combinaison linéaire des autres vecteurs.

Pour vérifier l'indépendance linéaire d'un ensemble de vecteurs, on peut utiliser la méthode des déterminants mineurs principaux.



Application

Normes

Définition 1.1.1 On appelle:

- Norme 1 d'un vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ de $\mathbb{R}^n$, la quantité positive :

$$\|x\|_1 := |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|.$$

- Norme euclidienne d'un vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ de $\mathbb{R}^n$, la quantité positive :

$$\|x\|_2 := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

- Norme infinie, dite aussi norme de Tchebychev d'un vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ de $\mathbb{R}^n$, la quantité positive :

$$\|x\|_\infty := \max\left(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\right).$$

R Toutes les normes dans $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes i.e. Soient $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$ deux normes de $\mathbb{R}^n$, alors, il existe $C_1,\ C_2 > 0$ tels que :
$\forall x \in \mathbb{R}^n$,

$$C_1 \mathcal{N}_1(x) \leq \mathcal{N}_2(x) \leq C_2 \mathcal{N}_1(x).$$

Quand une proporiètè est vérifiée par toute les normes de $\mathbb{R}^n$, on note seulement $\|\cdot\|$.

Définition 1.2.2 Soit f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On appelle fonction radiale associée à f, la fonction notée Φ_f est définie par :
$\forall x \in \mathbb{D}_f$

$$\begin{array}{rccl} \Phi_f : & \mathbb{R}_+ \times [0,\pi]^{n-2} \times [0,2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (r,\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_{n-2},\theta) & \mapsto & \Phi_f(r,\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_{n-2},\theta) = f(x), \end{array}$$

R Pour calculer une fonction radiale il suffit d'utiliser les coordonnées polaire en dimension deux, les coordonnées sphériques en dimension trois ou les coordonnées hyper-sphériques en dimension supérieurs à trois.

■ **Exemple 1.4**

- Soit $f : (x,y) \mapsto f(x,y) = x^2 + xy - 1$.
  $D_f = \mathbb{R}^2$. Posons

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$$

  avec $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$.
  La fonction radiale Φ_f associée à f est

$$\Phi_f(r,\theta) = r^2(\cos^2\theta + \cos\theta\sin\theta) - 1$$

- Soit $f : (x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = xyz$

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ y = r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z = r\cos(\varphi) \end{cases}$$

  avec $r > 0$, $\theta \in [0, 2\pi[$ et $\varphi \in [0, \pi]$.
  La fonction radiale associée à f est donnée par

$$\Phi_f(r,\varphi,\theta) = r^3\cos\theta\sin\theta\sin^2\varphi\cos\varphi$$

- Les coordonnées hypersphériques sont définies par

$$\begin{cases} x_1 = r\sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)\cdots\sin(\varphi_{n-3})\sin(\varphi_{n-2})\sin(\varphi_{n-1}) \\ x_2 = r\sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)\cdots\sin(\varphi_{n-3})\sin(\varphi_{n-2})\cos(\varphi_{n-1}) \\ x_3 = r\sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)\cdots\sin(\varphi_{n-3})\cos(\varphi_{n-2}) \\ x_4 = r\sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)\cdots\cos(\varphi_{n-3}) \\ \vdots \\ x_{n-1} = r\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2) \\ x_n = r\cos(\varphi_1) \end{cases}$$

avec $r > 0$, $\varphi_i \in [0,\pi]$ pour $i = \overline{1,n-2}$ et $\varphi_{n-1} \in [0,2\pi[$.

Continuité

Définition 1.2.3 Soient $\mathrm{D} \subset \mathbb{R}^n$ non vide et a un point de $\mathbb{R}^n$. a est dit point d'accumulation de D s'il existe une suite de $\mathrm{D} \setminus \{a\}$ qui converge vers a.

Définition 1.2.4 Soient f une fonction réelle de plusieurs variables réelles, a un point d'accumulation de $\mathbb{D}_f$ et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

1. On dit que f admet une **limite** ℓ en a ssi:

$$\lim_{r \to 0} \Phi_f(r, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-2}, \theta) = \ell,$$

   avec $r = \|x-a\|_2$ et ℓ est indépendant de θ et φ_i, $\forall i \in \{1, \ldots, n-2\}$. On note alors $f(x) \underset{\|x-a\| \to 0}{\longrightarrow} \ell$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell$ ou encore $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.

2. On dit que f admet une **limite** ℓ à l'infini ssi:

$$\lim_{r \to +\infty} \Phi_f(r, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-2}, \theta) = \ell,$$

   avec $r = \|x\|_2$ et ℓ est indépendant de θ et φ_i, $\forall i \in \{1, \ldots, n-2\}$. On note alors $f(x) \underset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$, $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} f(x) = \ell$, $f \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell$ ou encore $f(x) \underset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$.

■ **Exemple 1.5** La limite la fonction $f : (x,y) \mapsto f(x,y) = x^2 + xy - 1$ au point $(0,1)$ est -1. En effet:

Posons

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta), \\ y = r\sin(\theta) + 1 \end{cases} \quad \text{avec } r > 0 \text{ et } \theta \in [0, 2\pi[,$$

Rappel sur la différentiabilité

Définition : 1.1.1 - Le gradient

Soit f une fonction réelle de plusieurs variables réelles différentiables. Le gradient de la fonction f en un point $a \in D_f$ est donné par:

$$\nabla f(a) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

avec $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ est la dérivée partielle de f en a par rapport à la i^{eme} variable, on la note aussi $\partial_i f(a)$ ou encore $f_i'(a)$.

Exemple : 1.1.1 - Le gradient

Calculer le gradient des fonctions suivantes :

- $f_1 \; : (x, y) \rightarrow f_1(x, y) = x^3 e^y$
- $f_2 \; : (x, y) \rightarrow f_2(x, y) = x + y$
- $f_3 \; : (x, y) \rightarrow f_3(x, y) = \ln x + y$
- $f_4 \; : (x, y) \rightarrow f_4(x, y) = \frac{x^2 + y^3}{\cos y}$

Rappel sur la différentiabilité

Définition : 1.1.2 - La matrice hessienne

Soit f une fonction réelle de plusieurs variables réelles deux fois différentiables. La matrice hessienne (la hessienne) de la fonction f en un point $a \in D_f$ est donnée par :

$$\nabla^2 f(a) := Hess\, f(a) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}$$

avec $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$ est la dérivée partielle de $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ en α par rapport à la i^{eme} variable, on la note aussi $\partial^2_{i,j} f(a)$.

Exemple : 1.1.2 - La matrice hessienne

Calculer la matrice Hessienne des fonctions de l'exemple 1.

2. Rappel d'algèbre

Définition : 1.2.1 - Déterminant mineur principal

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$. On appelle *déterminant mineur principal* d'ordre k avec $k \in \{1, ..., min\{n, p\}\}$ le déterminant noté Δ_k d'une sous-matrice $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k}$ de taille $k * k$ (matrice extraite de la matrice A).

Définition : 1.2.2 - Matrice symétrique

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ une matrice carrée. A est dite symétrique si et seulement si $a_{i,j} = a_{j,i}$ pour tout $i, j \in \{1, ..., n\}$.

Définition : 1.2.3 - Nature d'une matrice

Soit A une matrice symétrique, alors :

- A est définie positive ($A > 0$) si $\Delta_k > 0$ pour tout $k \in \{1, ..., n\}$.
- A est semi-définie positive ($A \geq 0$) si $\Delta_k > 0$ pour tout $k \in \{1, ..., n-1\}$ et $\Delta_n = 0$.
- A est définie négative ($A < 0$) si pour tout $k \in \{1, ..., n-1\}$:

$$\begin{cases} \Delta_k > 0, si\ k\ est\ pair, \\ \Delta_k < 0, si\ k\ est\ impair. \end{cases}$$

- A est semi-définie négative ($A \leq 0$) si $\Delta_n = 0$ et pour tout $k \in \{1, ..., n-1\}$:

$$\begin{cases} \Delta_k > 0, si\ k\ est\ pair, \\ \Delta_k < 0, si\ k\ est\ impair. \end{cases}$$

3. Rappel sur la convexité

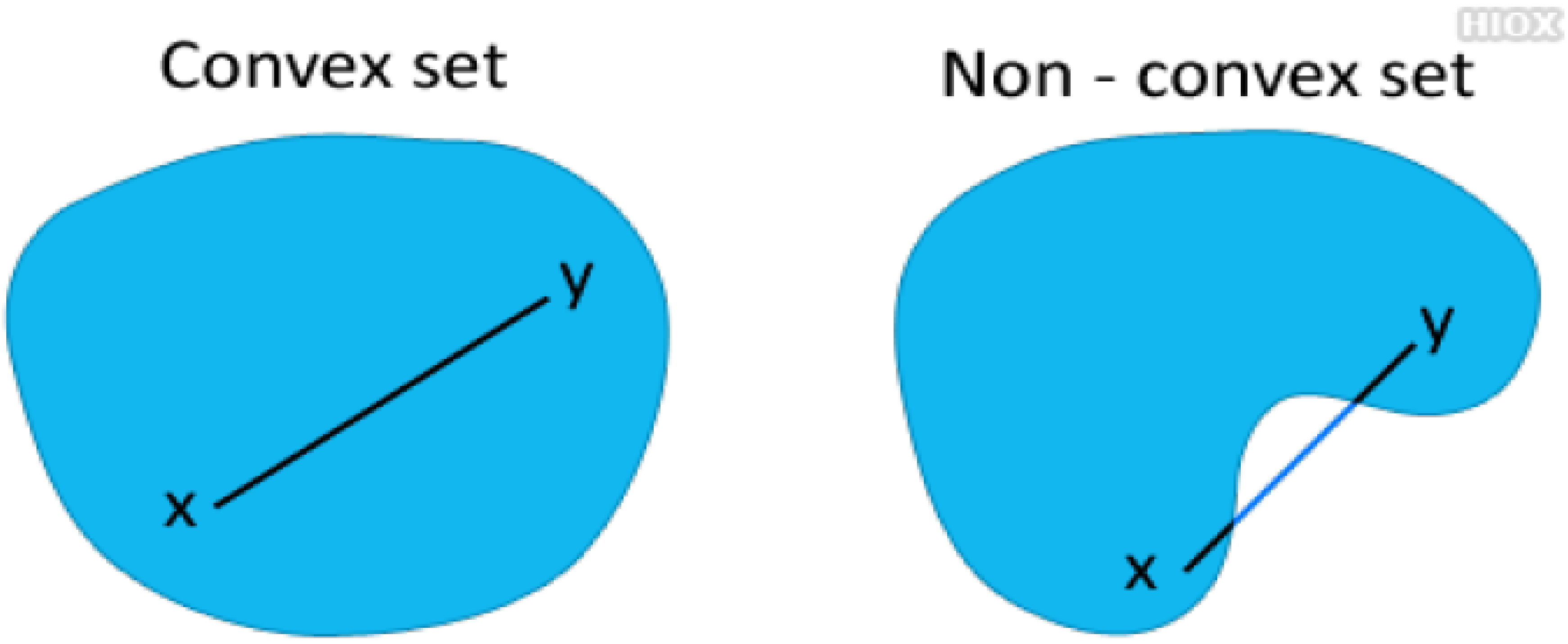
Définition : 1.3.1 - Ensemble convexe

Soit $C \subset \mathbb{R}^n$. L'ensemble C est convexe ssi :

$\forall (X, Y) \in C^2, \forall \lambda \in]0, 1[, \lambda X + (1 - \lambda) Y \in C$

Si $n = 2$, on peut interpréter la définition ci-dessus comme suit :

Si X et Y sont deux points de C, alors le segment qui les relie est inclus dans C.

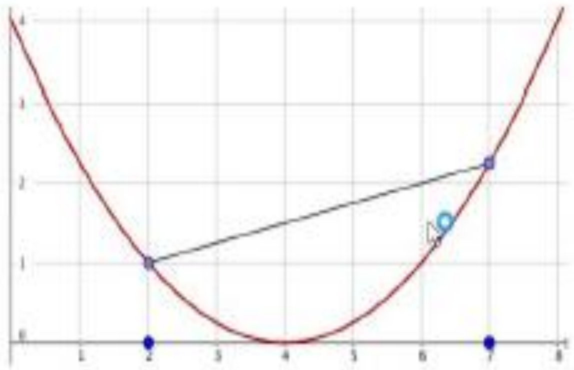


3. Rappel sur la convexité

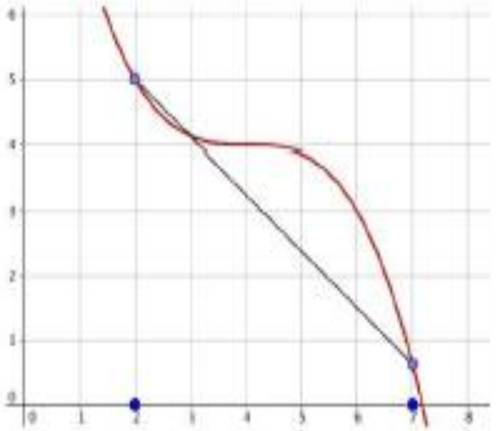
Définition : 1.3.2 - Fonction convexe

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et soit $C \subset D_f$ une contrainte convexe. f est convexe ssi :

$$\forall (X, Y) \in C^2, \forall \lambda \in]0,1[, f(\lambda X + (1-\lambda) Y) \leqslant \lambda f(X) + (1-\lambda) f(Y)$$



Fonction convexe



Fonction non convexe

Si cette dernière inégalité est stricte, alors f est strictement convexe.

3. Rappel sur la convexité

Fondamental : 1.3.1

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable.

- Si la hessienne $\nabla^2 f(X)$ est une matrice symétrique définie positive pour tout $X \in D_f$, alors f est strictement convexe.
- Si la hessienne $\nabla^2 f(X)$ est une matrice symétrique semi-définie positive pour tout $X \in D_f$, alors f est convexe.

Exemple : 1.3.1

Montrer que la fonction $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz$ est strictement convexe.

$$\nabla f(x,y,z) := \begin{pmatrix} 2x+2y+2z \\ 2x+4y \\ 2x+6z \end{pmatrix}, \nabla^2 f(x,y,z) := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} \Delta_1 = 2 > 0, \\ \Delta_2 = 4 > 0, \\ \Delta_3 = 8 > 0. \end{cases}$$

Les trois déterminants mineurs Δ_1, Δ_2, Δ_3 sont strictement positive, alors f est strictement positive.

4. Point critique d'une fonction

Définition : 1.4.1

Soit f une fonction différentiable en $\alpha \in \mathbb{D}_f$. On dit que α est un point critique (point critique ou stationnaire) de f ssi :

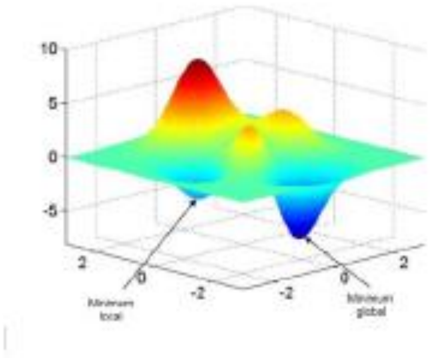
$$\nabla f(a) = 0_{R^n}$$

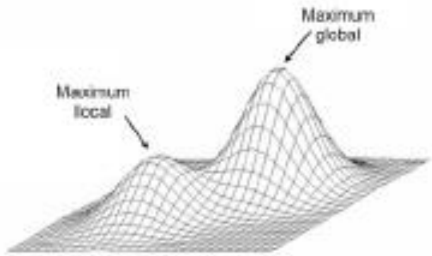
Exemple : 1.4.1 - Point critique

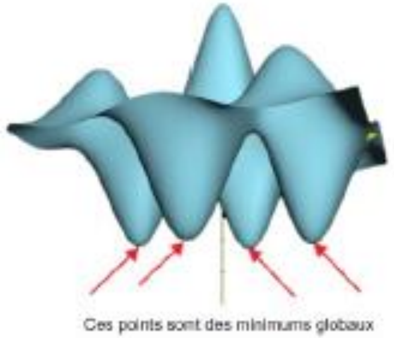
$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

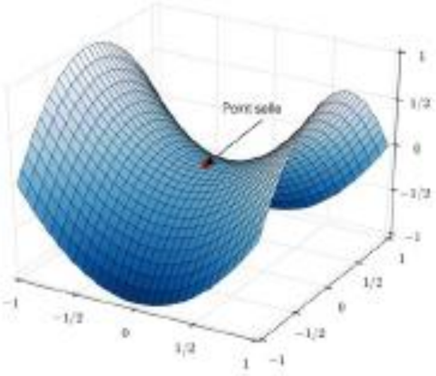
$$\nabla f(x, y) := \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

donc (0,0) est un point critique.









5. Rappel sur la coercivité

Définition : 1.5.1

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est coércive si $\lim_{\|X\| \to +\infty} f(X) = +\infty$. ($X$ est un vecteur (x, y)).

Exemple : 1.5.1

Soit $f(x, y) = x^2 + y^2$

Posons $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$ avec $\theta \in [0, 2\pi]$ donc $\|(x, y)\| = r > 0$.

$$\lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} f(x, y) = \lim_{r \to +\infty} r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \lim_{r \to +\infty} r^2 = +\infty,$$

donc f est coércive.

6. Rappel sur l'indépendance linéaire

Définition : 1.6.1 - Indépendance linéaire

Soit l'ensemble des vecteurs $V_i \in \mathbb{R}^n, (1 \leq i \leq p)$ (avec $p \leq n$).

On dit que cet ensemble de vecteurs sont linéairement indépendants (forment une famille libre) ssi :

$$\forall \lambda_i \in R (1 \leq i \leq p) : \sum_{i=1}^{p} \lambda_i V_i = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \ldots, \lambda_p = 0,$$

A utiliser pour montrer la régularité de l'ensemble C au début de l'exercice dans le cas ou *l'une des fonctions de la contrainte n'est pas affine*.

Exemple : 1.6.1

Montrer que $\vec{i}(1, 0)$ et $\vec{j}(0, 1)$ sont linéairement indépendants.

Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \vec{i} + \lambda_2 \vec{j} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, $\vec{i}(1, 0)$ et $\vec{j}(0, 1)$ sont linéairement indépendants.

6. Rappel sur l'indépendance linéaire

Exemple : 1.6.2

Montrer que $\vec{V}_1(2, 5)$ et $\vec{V}_2(7, 4)$ sont linéairement indépendants.

Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in R$:

$$\lambda_1 \vec{V}_1 + \lambda_2 \vec{V}_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2\lambda_1 + 7\lambda_2 = 0 \\ 5\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Ainsi, $\vec{V}_1(2, 5)$ et $\vec{V}_2(7, 4)$ sont linéairement indépendants.

6. Rappel sur l'indépendance linéaire

Méthode : 1.6.1 - Indépendance linéaire d'un ensemble de vecteurs constants (qui ne contient pas variables)

Un ensemble des vecteurs constants $V_1, V_2, ..., V_p \in \mathbb{R}^n$ (avec $p \leq n$) sont linéairement indépendants si le déterminant mineur principal d'ordre p de la matrice $A = (V_1, V_2, ..., V_p)$ est non nul ($rang(V_1, ..., V_p) = p$).

1. A utiliser pour montrer la régularité de l'ensemble C au début de l'exercice dans le cas ou les fonctions de la contrainte sont *affines* avec $p \leq n$.
2. A utiliser pour montrer la régularité *d'un point critique particulier du Lagrangien* (c.à.d après la recherche des points critiques du Lagrangien).

Attention

Si p > n, il faut étudier l'indépendance linéaire des vecteurs $V_1, V_2, ..., V_p \in \mathbb{R}^n$ deux à deux.

6. Rappel sur l'indépendance linéaire

Exemple : 1.6.3 : $p = n$

Pour l'exemple précédent : Montrer que $\vec{V_1}(2,5)$ et $\vec{V_2}(7,4)$ sont linéairement indépendants. Dans ce cas : p=2

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 7\lambda_2 = 0 \\ 5\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_{p=2} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -28 \neq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\vec{V_1}(2,5))$ et $\vec{V_2}(7,4)$ sont linéairement indépendants.

Exemple : 1.6.4 : $p <= n$

Montrer que $\vec{V_1}(1,1,3)$ et $\vec{V_2}(1,0,1)$ sont linéairement indépendants.

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ 3\lambda_1 + 1\lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_{p=2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemple : 1.6.5 : $p > n$

Montrer que $\vec{V}_1(1,1)$, $\vec{V}_2(0,-1)$ et $\vec{V}_3(-1,0,)$ sont linéairement indépendants.

Puisque $p > n$, on doit montrer l'indépendance linéaire des vecteurs 2 à 2.

Pour $\vec{V}_1(1,1)$ et $\vec{V}_2(0,-1)$:

$$\begin{cases} 1\lambda_1 + 0\lambda_2 = 0 \\ 1\lambda_1 - 1\lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_{p=2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour $\vec{V}_1(1,1)$ et $\vec{V}_3(0,-1)$:

$$\begin{cases} 1\lambda_1 - 1\lambda_2 = 0 \\ 1\lambda_1 + 0\lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_{p=2} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour $\vec{V}_2(1,1)$ et $\vec{V}_3(0,-1)$:

$$\begin{cases} 0\lambda_1 - 1\lambda_2 = 0 \\ -1\lambda_1 + 0\lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_{p=2} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que $\vec{V}_1(1,1)$, $\vec{V}_2(0,-1)$ et $\vec{V}_2(-1,0,)$ sont constants et linéairement indépendants 2 à 2.

Résultats d'existence et d'unicité

Théorème 2.2.1 Soit f une fonction réelle de plusieure variables réelles. Alors le problème (PO) admet au moins une solution si f est continue et coercive.

Théorème 2.2.3 Si de plus des hypothèses du théorème précédent, f est:

- convexe, alors le problème (PO) admet au moins une solution globale.
- strictement convexe, alors le problème (PO) admet une solution globale unique.

Exercice 1 : soit le problème d’optimisation suivant :

$$Min\, f(x,y) = 5x^2 + 6y^2 - xy$$

1. Trouver les points critiques du problème

rcice 2 : Soit la fonction

$$f(x, y,z) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + z^2 .$$

1. f est-elle convexe ?

Exercice 3 : Soit le problème d’optimisation (P1) suivant :

$$Min\, f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy$$

1. f est-elle coércive ?
2. Trouvez les points critiques de ce problème.
3. La solution est-elle unique ? **Rq : Il faut voir si f est strictement convexe**

Exercice 4 : Soit le problème d’optimisation (P2) suivant :

$$Min\, f(x,y) = x^2 + y^2$$

1. f est-elle coércive ?
2. Trouvez les points critiques de ce problème.
3. Déterminer leur nature
4. La solution est-elle unique ?.