PROBLÈMES D'OPTIMISATION SOUS CONTRAINTES

Dr. TRIQUI SARI Lamia

Définition : 2.1.1

On appelle problème d'optimisation (PO) sous contraintes, le problème suivant :

$$\begin{cases} \min\limits_{x \in C} f(x), \\ C \; est\; une\; contrainte \end{cases}$$

$$C := \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leqslant 0,\, h_j(x) = 0, avec\, i \in \{1, \ldots, p\},\, j \in \{1, \ldots, q\}\},$$

g_i, h_j sont des fonctions de R^n dans R.

Définition : 2.1.2 - Minimum global

On dit que la fonction f sous la contrainte C admet un minimum global (ou solution globale du PO*) en un point α de D_f si :

$$\begin{cases} f(a) \leq f(x), & \forall x \in C \\ \quad a \in C \end{cases}$$

Si on se restreint à un voisinage V (une partie de C) de α, alors le minimum (la solution) est dit *local(e)*.

Si l'inégalité précédente est stricte, on parlera d'un(e) minimum (solution) strict(e). Pour un maximum, il suffit de changer le sens des inégalités.

Contraintes

Définition : 2.2.1 - Image réciproque d'un ensemble

Soit f est une fonction de E dans G et l'ensemble $Y \subset G$, alors l'image réciproque de Y est l'ensemble notée $f^{-1}(Y)$ tel que :

$$f^{-1}(Y) := \{x \in E : f(x) \in Y\}$$

Exemple : 2.2.1 - Image réciproque d'un ensemble

Soit $f(x) = x^2$. Déterminer les ensembles $f^{-1}([0, 1])$, $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}(]1, +\infty])$.

$$\begin{aligned} f^{-1}([0,1]) &= \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in [0,1]\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : 0 \leqslant x^2 \leqslant 1\} \\ &= [-1,1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(1) &= \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 1\} \\ &= \{-1,1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(]1,+\infty[) &= \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in]1,+\infty[\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : 1 < x^2\} \\ &=]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\end{aligned}$$

Définition : 2.2.2 - Ensemble fermé

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, ($a < b$). Les ensembles $\{a\}, [a, b], [a, +\infty[$ et $]-\infty, a]$ sont dits des fermés de $\mathbb{R}$.

Remarque : 2.2.1

- $\emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont des fermés de $\mathbb{R}$.
- La réunion et l'intersection des fermés est un fermé.

Définition : :2.2.3- Types des contraintes

Soit $(p, q) \in (N^*)^2$ tels que $max\{p, q\} \leq n$ et soient $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ et $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ des fonctions continues.

- Une (des ou un ensemble des) contrainte(s) d'égalité(s) est le sous ensemble de $\mathbb{R}^n$ qui peut s'écrire sous l forme : $\{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0\}$.
- Une (des ou un ensemble des) contrainte(s) d'inégalité(s) est le sous ensemble de $\mathbb{R}^n$ qui peut s'écrire sou la forme : $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0\}$.
- Une (des ou un ensemble des) contrainte(s) mixte(s) est le sous ensemble de $\mathbb{R}^n$ qui peut s'écrire sous la forme : $\{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0, g(x) \leq 0\}$.

Définition : - La matrice jacobienne

Soit $x \to g(x) = (g_1(x), g_2(x), ..., g_p(x))$ différentiable avec $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i \in \{1, ..., p\}$. La matrice jacobienne (où la jacobienne) de la fonction g en un point $x \in D_g$ est donnée par :

$$J_g(x) := \begin{pmatrix} \nabla' g_1(x) \\ \vdots \\ \nabla' g_p(x) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \partial_1 g_1(x) & \cdots & \partial_n g_1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 g_p(x) & \cdots & \partial_n g_p(x) \end{pmatrix}$$

Exemple :

Calculer la jacobienne de la fonction : $f(x, y) = (x + y, x^2 y, y^3 e^x)$

Définition : 2.2.5 - Ensemble borné

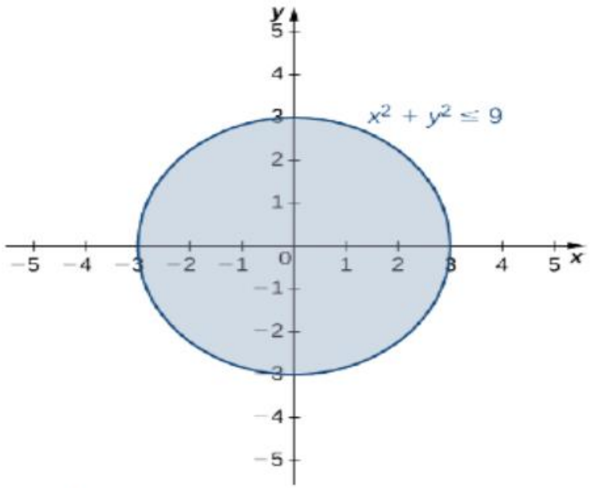
Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ une contrainte. On dit que C est bornée ssi :

$\exists M > 0, \forall x \in C, \|x\| \leq M$

Exemple : 2.2.2 - Ensemble borné

$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$.

La contrainte C défini par l'inéquation $x^2 + y^2 \leq 9$ est représentée par le disque défini par un centre (0,0) et un rayon égal à 3.



L'ensemble des points (x,y) donné par la contrainte C

Résultat d'existence et d'unicité

Fondamental : - Existence d'un optimum

Soient C une contrainte fermée et f une fonction continue de C dans R.

$$f \text{ coércive} \Rightarrow \exists \alpha \in C : f(\alpha) = \min_{x \in C} f(x)$$
$$C \text{ bornée} \Rightarrow \exists \alpha \in C : f(\alpha) = \min_{x \in C} f(x)$$

Exemple : Existence d'un optimum

Soit le PO* suivant :

$$\begin{cases} Min\, f(x) = x^2 + y^2 - 3x + 5y + 2, \\ \qquad s.c.\; x + y \leq 4 (C) \end{cases}$$

Montrer que ce PO* admet au moins une solution (admet un minimum global en au moins un point).

Soit le PO* suivant :

$$\begin{cases} Min\ f(x) = x^2 + y^2 - 3x + 5y + 2, \\ \quad s.c.\ x + y \leqslant 4 (C) \end{cases}$$

Montrer que ce PO* admet au moins une solution (admet un minimum global en au moins un point).

f est une fonction polynomiale de 2ème dégrée, donc elle est continue sur R^2.

La contrainte C est un fermé. Elle forme un demi-plan limité par la droite x+y=4 (incluse).

Maintenant, il faut montrer que la fonction f est coércive

Posons $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$ avec θ appartient à $[0,2\pi]$ donc $\|(x,y)\| = r$

$$\begin{aligned}
\lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} f(x,y) &= \lim_{r \to +\infty} f(r,\theta) \\
&= \lim_{r \to +\infty} r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta) - 3r\cos(\theta) + 5r\sin(\theta) + 2 \\
&= \lim_{r \to +\infty} r^2 (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) - r(3\cos(\theta) + 5\sin(\theta)) + 2 \\
&= \lim_{r \to +\infty} r^2 (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

donc f est coércive, par conséquent *ce problème* admet au moins une solution*

Exemple : 2.4.3 - Existence d'un optimum

Soit le PO* suivant :

$$\begin{cases} Min\, f(x) = x + y, \\ s.c.\, x^2 + y^2 \leqslant 4 (C) \end{cases}$$

Montrer que ce PO* admet au moins une solution (admet un minimum global en au moins un point).

f est une fonction polynomiale de 1ème dégrée, donc elle est continue sur R^2.

La contrainte C est un fermé. Elle forme un disque de centre (0,0) et rayon=2 dont le cercle est inclus dans C. On peut montrer ça aussi en disant que : puisque l'ensemble $]-\infty,4]$ est un fermé et la fonction x^2+y^2 est continue sur R^2. alors l'image réciproque de $]-\infty,4]$ qui est l'ensemble C par la fonction x^2+y^2 est un ensemble fermé.

C est borné, par conséquent *ce problème* admet au moins une solution*

Fondamental : 2.4.2 - Unicité d'un optimum

Sous les mêmes hypothèses du théorème d'existence, si f est strictement convexe et C est convexe, alors :

$$\exists ! \alpha \in C : f(\alpha) = \min_{x \in C} f(x)$$

Exemple : 2.4.4 - Unicité d'un optimum

Monter que le PO* suivant admet une seule solution (admet un minimum global en un seul point).:

$$\begin{cases} Min\ f(x) = x^2 + y^2 - 3x + 5y + 2, \\ \qquad s.c.\ x + y \leqslant 4 (C) \end{cases}$$

Nous avons montré dans le premier exemple que f est continue et coércive et que l'ensemble C est un fermé. Maintenant, il faut montrer que f est strictement convexe et C est convexe.

1 - Montrer que f est strictement convexe :

$$\nabla f(x,y) := \begin{pmatrix} 2x-3 \\ 2y+5 \end{pmatrix}, \nabla^2 f(x,y) := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} \Delta_1 = 2 > 0, \\ \Delta_2 = 4 > 0. \end{cases}$$

Les déterminants mineurs principaux Δ_1 et Δ_2 sont strictement positives, par conséquent la matrice hessienne est définie positive, alors la fonction f est *strictement convexe*.

2 - Maintenant, il faut montrer que la contrainte C est convexe.

- On peut dire que l'ensemble C forme un demi-plan limité par la droite x+y=4, donc C est convexe.
  On peut dire aussi que la fonction x+y est linéaire, donc C est convexe.
  Une troisième méthode consiste à montrer ça à travers la définition de base de la convexité d'un ensemble.

Soient $A(x_1,y_1)$ et $B(x_2,y_2)$ deux points de C :

- A appartient à C implique que $x_1+y_1<=4$ --- (1).
- B appartient à C implique que $x_2+y_2<=4$ --- (2).

Il faut monter que :

$$\forall\, 0<\lambda<1,\ \lambda A+(1-\lambda)B\in C$$

sachant que :

$$\lambda A+(1-\lambda)B\in C \Leftrightarrow \lambda\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+(1-\lambda)\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\in C$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\\ \lambda y_1+(1-\lambda)y_2\end{pmatrix}\in C$$

$$\Leftrightarrow \lambda x_1+(1-\lambda)x_2+\lambda y_1+(1-\lambda)y_2\leqslant 4$$

Donc, il faut montrer que :

$$\lambda x_1+\lambda y_1+(1-\lambda)x_2+(1-\lambda)y_2\leq 4$$

- On multiplie (1) par λ, on obtient : $\lambda x_1+\lambda y_1<=\lambda 4$ --- (3).
- On multiplie (2) par (1-λ), on obtient :$(1-\lambda)x_2+(1-\lambda)y_2<=(1-\lambda)4$ --- (4).

(3)+(4) donne : $\lambda x_1+\lambda y_1+(1-\lambda)x_2+(1-\lambda)y_2<=4$,

Ainsi :

$$\forall\, 0<\lambda<1,\ \lambda A+(1-\lambda)B\in C$$

Par conséquent :

$$\exists!\,\alpha\in C : f(\alpha)=\min_{x\in C} f(x)$$

Optimisation sous contraintes d'égalité

Définition : 2.5.1 - Problème d'optimisation sous contraintes d'égalité

On appelle PO* sous contraintes d'égalités (CE), le problème suivant :

$$\begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x), \\ G \text{ est une contrainte d'égalité} \end{cases}$$

G inclut une ou plusieurs CE* de R^n dans R i.e. :

$$G = \{x \in R^n : g_i(x) = 0, i \in \{1, \dots, p\}\}$$

Définition : 2.5.2 - Point/Ensemble régulier

Un point X de G est dit régulier si :

- Cas d'une seule CE*, Si :

$$\nabla g(X) \neq 0$$

- Cas de plusieurs CE* : si :

$$\forall X \in G : \nabla g_1(X), \nabla g_2(X), \dots, \nabla g_p(X)$$

sont linéairement indépendants (c.à.d rang(J_G)=P)

Fondamental : 2.5.1 - Théorème du Lagrange

Soient f et g_i des fonctions de R^n dans R différentiables. Si $X^*(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ est un point critique du PO* et les vecteurs $\nabla g_1(X^*), \nabla g_2(X^*), \dots, \nabla g_p(X^*)$ sont linéairement indépendants, alors ils existent des réels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ tel que :

$$\nabla f(X^*) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla g_i(X^*) = 0$$

Définition : 2.5.3 - Le Lagrangien

Soient f et g_i des fonctions continues de R^n dans R. On appelle *Lagrangien L* du PO* sous CE*, la fonction :

$$L \ : \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$L(X, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) = f(X) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i(X)$$

Les $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont appelés : *les multiplicateurs du Lagrange*.

Remarque : 2.5.1

- Le but du lagrangien est de ramener un PO* avec contraintes à un PO* sans contraintes.
- Le lagrangien fait intervenir autant de multiplicateurs que des contraintes.

Exemple : 2.5.1 - Le Lagrangien

Former le lagrangien du problème suivant :

$$\begin{cases} Min\ f(x,y)=x^2+3y^2, \\ s.c.\quad 3x+2y-3=0 \\ \qquad\qquad x+5y=4 \end{cases}$$

Le lagrangien s'écrit comme suit :

$$L(x,y,\lambda_1,\lambda_2)=x^2+3y^2+\lambda_1(3x+2y-3)+\lambda_2(x+5y-4)$$

Fondamental : 2.5.2 - Condition nécessaire d'optimalité du premier ordre

D'après le théorème du Lagrange, on peut dire qu'un point (X^*,λ^*) est un point critique du lagrangien s'il vérifie la condition nécessaire d'optimalité du premier ordre suivante :

$$\nabla L(X^*,\lambda^*)=0$$

Avec : $X^*=(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*)$ *et* $\lambda^*=(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\ldots,\lambda_p^*)$

Si (X^*,λ^*) est *un point critique* du lagrangien et X^* est *un point régulier de G*, alors X^* est une solution du PO *.

Méthode : 2.5.1 - Étude de la régularité des points critiques

La vérification de régularité permet de s'assurer que chaque point critique du lagrangien X^* est une solution du PO^*

.

On peut étudier la régularité de G avant la recherche des points critiques du Lagrangien. *Si l'ensemble C est régulier alors tous les points critiques du Lagrangien qu'on va les rechercher sont réguliers.*

Une autre possibilité consiste à étudier la régularité des points critiques du Lagrangien un par un (càd après le calcul du Lagrangien et la recherche de ses points critiques).

Voici une démarche à suivre :

- Cas des fonctions g_i *affines* :
  - *Cas d'une seule fonction contrainte* : Si la contrainte C est composée d'une seule fonction g affine, alors G est régulier.
  - *Cas de plusieurs fonctions contrainte* : Si la contrainte G est composée de plusieurs fonctions g_i affines, et les vecteurs gradients de g_i($\nabla g_1(X), \nabla g_2(X), \dots, \nabla g_p(X)$) sont linéairement indépendants, alors G est régulier (voir la section *Rappel sur l'indépendance linéaire*).
- Sinon (si au moins une des fonctions g_i *n'est pas affine*), on distingue deux cas :

- *Cas d'une seule contrainte* : Avant la recherche des points critiques :

  - Si $\forall X \in G$, $\nabla g(X) \neq 0$ ($\nabla g(X) = 0$ n'a pas de solutions dans G), alors G est régulier.
  - Sinon (si ce système d'équations $\nabla g(X) = 0$ admet une (ou plusieurs) solution *dans G* (une solution qui respecte la contrainte), alors l'ensemble C n'est pas régulier. Dans ce cas, chercher d'abord les points critiques du Lagrangien, puis étudier leur régularité un par un (définition 2.5.2 de ce chapitre). Si on trouve qu'un point critique du Lagrangien n'est pas régulier, ce point ne peut pas être une solution du PO*.

- *Cas de plusieurs fonctions contrainte* : Avant la recherche des points critiques :

  - Si les gradients des g_i ($\nabla g_1(X), \nabla g_2(X), \ldots, \nabla g_p(X)$) sont linéairement indépendants $\forall X \in G$, alors l'ensemble G est régulier (définition 1.6.1 du chapitre 1).
  - Sinon, chercher d'abord les points critiques du Lagrangien, puis étudier leur régularité un par un (définition 2.5.2 de ce chapitre). Si on trouve qu'un point critique du Lagrangien n'est pas régulier, ce point ne peut pas être une solution du PO*.

	Fonction(s) affine(s)	Au moins une des fonctions g_i n'est pas affine
Une seule fonction g	G est régulier	- Si $\forall X \in G$, $\nabla g(X) \neq 0$, alors G est régulier. - Sinon (si $\nabla g(X) = 0$ admet une (ou plusieurs) solution *dans G*), chercher d'abord les points critiques du Lagrangien, puis étudier leur régularité un par un.
Plusieurs fonctions g_i	Si $\nabla g_1, \nabla g_2, \ldots, \nabla g_p$ sont linéairement indépendants, alors G est régulier	- Si $\forall X \in G$, $\nabla g_1(X), \nabla g_2(X), \ldots, \nabla g_p(X)$) sont linéairement indépendants, alors G est régulier. - Sinon, chercher d'abord les points critiques du Lagrangien, puis étudier leur régularité un par un.

Définition : 2.5.4 - Matrice hessienne bordée

Soit un PO* sous CE* $g_i(i \in \{1,2,\ldots,p\})$. On suppose que le lagrangien associé à ce PO* est deux fois différentiable (de classe C^2) et les fonctions $g_i(i \in \{1,2,\ldots,p\})$ sont différentiables (de classe C^1).

Soit $X^*(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ un point critique avec p<=n.

La matrice hessienne bordée associée au PO* par les contraintes $g_i(i \in \{1,2,\ldots,p\})$ est définie comme suit :

$$H := \begin{pmatrix} 0 & J_G \\ J_G^t & \nabla_x^2 L \end{pmatrix}$$

Exemple : 2.5.2

Écrire la matrice hessienne bordée associée au PO suivant :

$$\begin{cases} Min\ f(x,y) = x^2 + 3xy - y^2, \\ \quad s.c. \quad 3x + 7y - 5 = 0 \end{cases}$$

$$L(x,y,\lambda) := x^2 + 3xy - y^2 + \lambda(3x + 7y - 5)$$

$$\nabla_x L := \begin{pmatrix} 2x+3y \\ 3x-2y \end{pmatrix}, \nabla_x^2 L := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, J_G := \begin{pmatrix} 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$H := \begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Exemple : 2.5.3

Écrire la matrice hessienne bordée associée au PO suivant :

$$\begin{cases} Min\ f(x,y) = 3x^2 - 8xy^2 + y^2 - 1, \\ s.c. \quad x + 3y = 7 \\ \quad 2x - 5y = 0 \\ \quad 4x = 3 - y \end{cases}$$

$$L(x,y,\lambda) := 3x^2 - 8xy^2 + y^2 - 1 + \lambda_1(x+3y-7) + \lambda_2(2x-5y) + \lambda_3(4x+y-3)$$

$$\nabla_x L := \begin{pmatrix} 6x - 8y^2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 \\ -16xy + 2y + 3\lambda_1 - 5\lambda_2 + \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$\nabla_x^2 L := \begin{pmatrix} 6 & -16y \\ -16y & 2 \end{pmatrix}, J_G := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$H := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 6 & -16y \\ 3 & -5 & -1 & -16y & 2 \end{pmatrix}$$

Fondamental : 2.5.3 - Condition suffisante d'optimalité du second ordre

Parfois, on nous demande de déterminer la nature d'un point critique (maximum local, minimum local) dans les cas ou plusieurs points critiques sont trouvés.

n est le nombre des variables.

p est le nombre des CE*.

- Si p est pair, le PO* admet :
  - *Un minimum local* : si tous les mineurs $H_{p+1}, H_{p+2}, \dots, H_n$ sont positifs.
  - *Un maximum local* : si H_{p+1} est négatif et $H_{p+1}, H_{p+2}, \dots, H_n$ sont de signes alternés.
- Si p est impair, le PO* admet :
  - *Un minimum local* : si tous les mineurs $H_{p+1}, H_{p+2}, \dots, H_n$ sont négatifs.
  - *Un maximum local* : si H_{p+1} est positif et $H_{p+1}, H_{p+2}, \dots, H_n$ sont de signes alternés.

	P pair	**P impair**
Minimum local	**Si tous les mineurs $H_{p+1}, H_{p+2}, \dots, H_n$ sont positifs.**	**Si tous les mineurs $H_{p+1}, H_{p+2}, \dots, H_n$ sont négatifs.**
Maximum local	**Si H_{p+1} est négatif et $H_{p+1}, H_{p+2}, \dots, H_n$ sont de signes alternés.**	**Si H_{p+1} est positif et $H_{p+1}, H_{p+2}, \dots, H_n$ sont de signes alternés.**

Exercice 1

Classifier les ensembles suivants entre : Fermé, borné, compact, ni fermé ni borné

$\boxed{C_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y\geqslant 1\}}$ $\boxed{C_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\}}$ $\boxed{C_3=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\}}$

Exercice 2 : Soit le problème d'optimisation (P1) suivant :

$$Min\ f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy$$

$$x^2 + y^2 = 1 --- (C) \quad \leftrightarrow g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

P1 est un problème d'optimisation à deux dimensions avec une seule contrainte d'égalité.

1. Montrer que P1 admet au moins une solution.
2. Est-elle unique ?
3. Etudier la régularité de la contrainte.
4. Trouvez les points critiques de ce problème.
5. En quels points, P1 admet un minimum ?