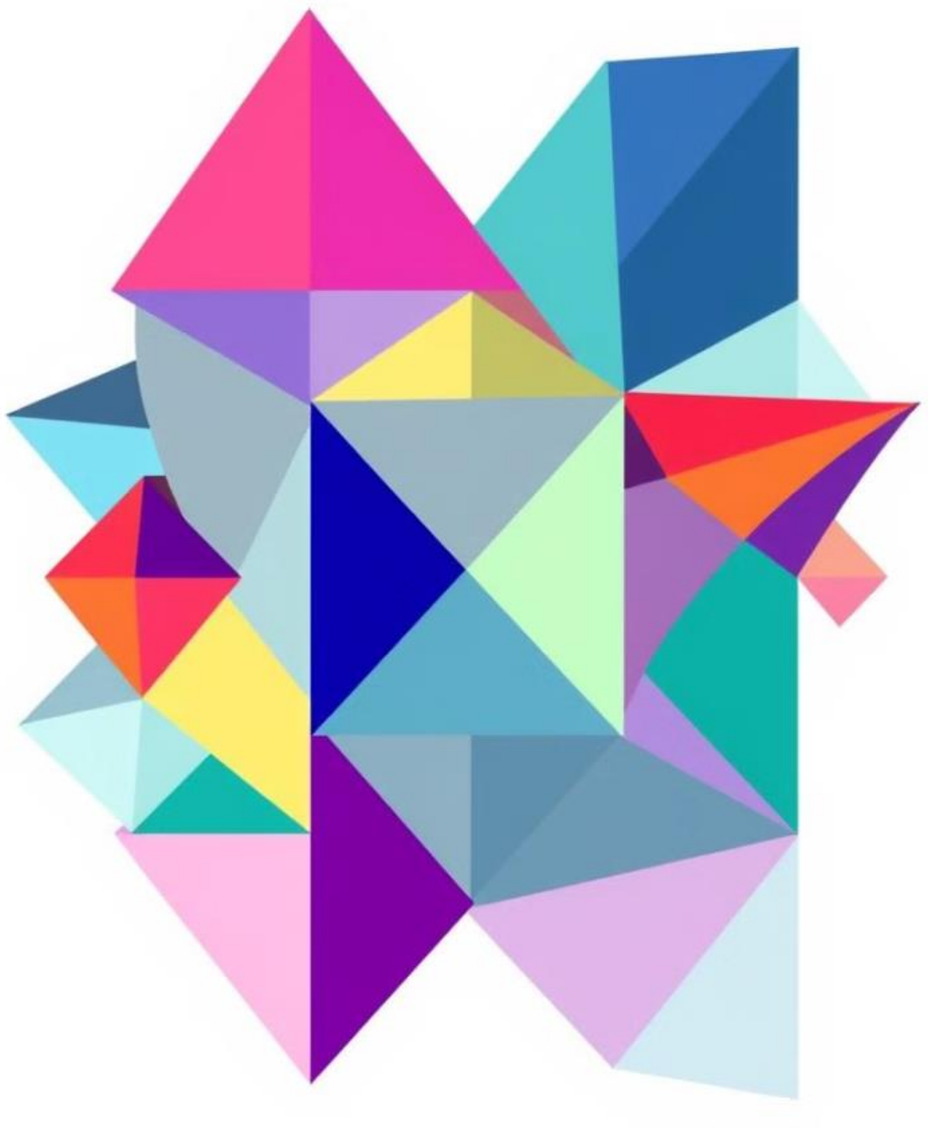


Problèmes Linéaires en Variables Entières

Bienvenue ! Ce cours explore les problèmes linéaires en variables entières (PLNE), un concept clé en optimisation. Nous verrons comment les PLNE étendent la programmation linéaire en introduisant des contraintes d'intégralité, et explorerons leurs applications pratiques ainsi que des méthodes de résolution.

par Lamia Triqui

Définition des PLNE

Concept

Un PLNE est un problème d'optimisation où certaines variables de décision doivent prendre des valeurs entières. La fonction objectif et les contraintes restent linéaires.

Applications

Les PLNE sont utilisés dans des domaines tels que la planification de production, le transport, et le problème du sac à dos, permettant de prendre des décisions optimales en tenant compte de contraintes discrètes.

Formulation des PLNE

Un PLNE peut être formulé comme suit : maximiser (ou minimiser) la fonction objectif $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$ Z=c 1 x 1 +c 2 x 2 +⋯+c n x n , sous les contraintes : $a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n \leq b_1$, $a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n \leq b_2$, $x_i \in Z$, $\forall i \in S$, $x_i \geq 0$, $\forall i$. a 11 x 1 +a 12 x 2 +⋯+a 1n x n ≤b 1 , a 21 x 1 +a 22 x 2 +⋯+a 2n x n ≤b 2 , x i ∈Z,∀i∈S, x i ≥0,∀i.

Exemple de PLNE : Production

Une usine doit produire deux types de produits, A A et B B. Les variables x_1 x 1 et x_2 x 2 représentent les quantités de A A et B B à produire. La fonction objectif vise à maximiser le profit $Z = 30x_1 + 40x_2$ Z=30x 1 +40x 2 . Les contraintes limitent les ressources disponibles : $4x_1 + 3x_2 \leq 24$, $2x_1 + x_2 \leq 8$, x_1 , $x_2 \geq 0$ et entiers . 4x 1 +3x 2 ≤24,2x 1 +x 2 ≤8,x 1 ,x 2 ≥oet entiers.

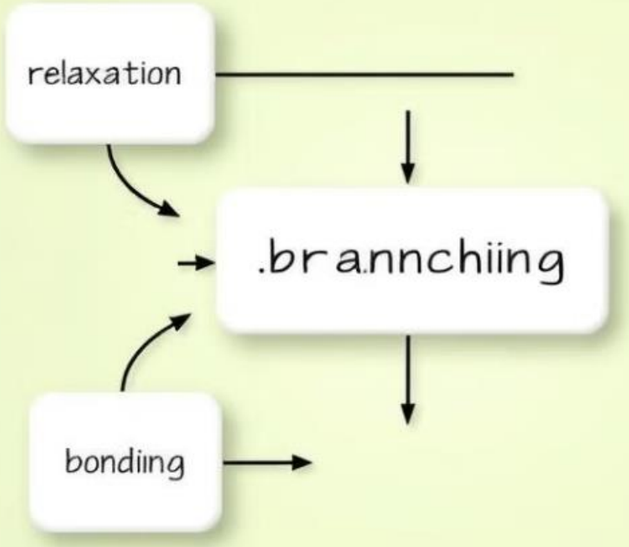
Résolution des PLNE

1 *Énumération Binaire*

Cette méthode implique de tester toutes les combinaisons possibles de variables binaires (0 ou 1) pour trouver la solution optimale. Cependant, le nombre de combinaisons croît exponentiellement avec le nombre de variables, limitant cette approche aux problèmes de petite taille.

2 *Séparation et Évaluation Progressive (Branch & Bound)*

Branch & Bound découpe le problème en sous-problèmes plus simples, en calculant des bornes supérieures et inférieures pour chaque sous-problème afin d'élaguer les branches qui ne peuvent pas mener à une meilleure solution.



Branch & Bound : Principe

1

Relaxation Continue

Résoudre le problème en relâchant la contrainte d'intégralité, permettant de trouver une solution optimale pour le problème relaxé.

2

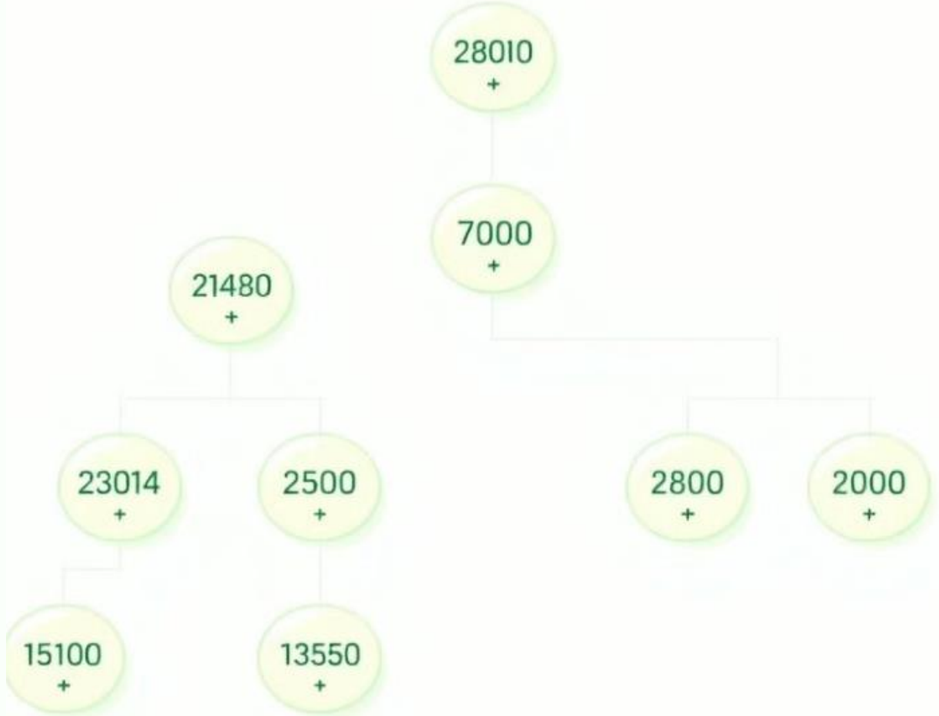
Séparation (Branching)

Diviser le problème en deux sous-problèmes en imposant une valeur à une variable entière (par exemple, $x_1 = 0$ ou $x_1 = 1$).

3

Évaluation (Bounding)

Calculer les bornes supérieures et inférieures pour chaque sous-problème, permettant de réduire l'espace de recherche et d'élaguer les branches qui ne conduisent pas à une meilleure solution.



Applications Pratiques de Branch & Bound

Affectation d'Équipements

Déterminer l'affectation optimale d'équipements à des tâches spécifiques, en tenant compte des contraintes de capacité et de coût.

Planification des Horaires d'Employés

Créer des horaires d'employés efficaces, en tenant compte des contraintes de disponibilité, des compétences et des besoins en personnel.

Optimisation de Réseaux Logistiques

Trouver des routes optimales pour la livraison de marchandises, en minimisant les coûts de transport et en optimisant le temps de livraison.

Conclusion

Les PLNE sont des outils puissants pour résoudre des problèmes d'optimisation impliquant des décisions discrètes. Bien que l'approche par énumération soit simple, Branch & Bound est plus efficace pour des problèmes complexes. Des logiciels tels que CPLEX, Gurobi, ou Python (PuLP) sont essentiels pour résoudre des PLNE de grande taille.

Points Clés à retenir

Les PLNE sont des modèles mathématiques qui intègrent des contraintes d'intégralité, les rendant plus complexes à résoudre que la programmation linéaire. La méthode Branch & Bound est une technique efficace pour résoudre ces problèmes, offrant des solutions optimales dans diverses applications pratiques.