CHAPITRE 2 : Les annuités

1. Définition et caractéristiques

On appelle annuités une suite de flux monétaires perçus ou réglés à intervalles de temps égaux. Elles représentent des versements périodiques de sommes d'argent pour soit pour rembourser une dette soit pour construire un capital.

Le terme « annuité » est habituellement réservé à des périodicités annuelles. Lorsque la période est différente de l'année, il est préférable de remplacer le terme « annuité » par « semestrialité », « trimestrialité » ou « mensualité ».

L'étude des annuités consiste à déterminer la valeur actuelle ou la valeur acquise, à une date donnée, d'une suite de flux. Elle prend en considération la date du premier flux, la périodicité des flux, le nombre des flux et le montant de chaque flux.

Lorsque les annuités sont égales, on parle d'annuités constantes, alors que lorsque leur montant varie d'une période à une autre, on parle d'annuités variables.

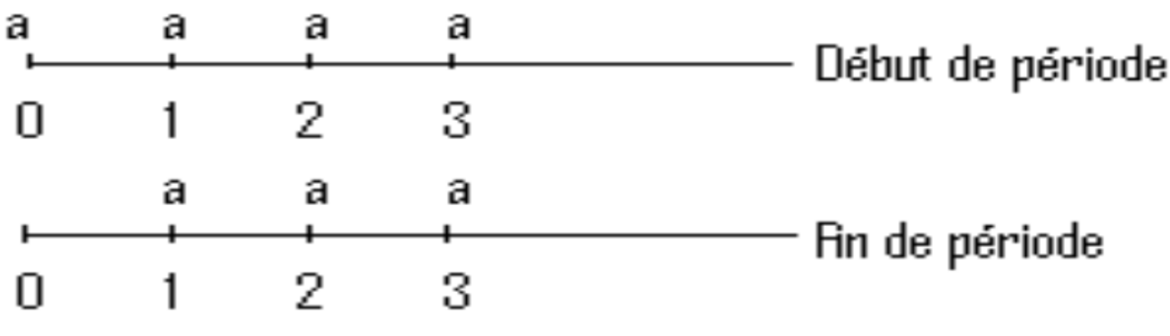
- ✓ **Remarques**

Les annuités peuvent être perçues ou versées en début de période ou en fin de période.

Les annuités peuvent être certaines lorsque leur nombre est connu à l'avance, aléatoires ou viagères, lorsque leur nombre est inconnu au moment du contrat ou enfin perpétuelles lorsque leur nombre est illimité.

2. Les annuités constantes

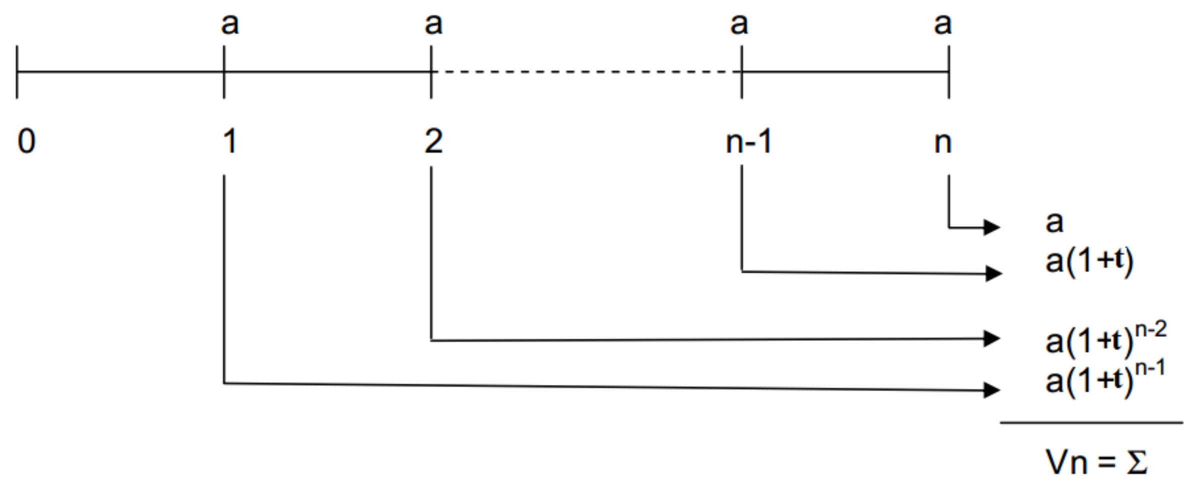
La valeur acquise ou la valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes dépend de la date de versement c'est à dire début de période ou fin de période.
L'étude des annuités de début de période ne présente pas de différences majeures par rapport à celle des annuités de fin de période. En effet par un simple changement d'origine on se ramène au schéma des annuités de fin de période.



2.1. Les annuités constantes de fin de période

2.1.1. La valeur acquise

On appelle valeur acquise par une suite d'annuités constantes de fin de période, la somme des annuités (Vn) exprimée immédiatement après le versement de la dernière annuité.



Si on note par :

V_n : la valeur acquise par la suite des annuités
a : l'annuité constante de fin de période
n : le nombre de périodes (d'annuités)
t : le taux d'intérêt par période de capitalisation

On a alors :

$Vn = a + a(1+t) + a(1+t)^2 + \ldots + a(1+t)^{n-2} + a(1+t)^{n-1}$

$Vn = a\,[1 + (1+t) + (1+t)^2 + \ldots + (1+t)^{n-2} + (1+t)^{n-1}]$

Il s'agit d'une suite géométrique de premier terme 1, de raison géométrique q = (1+t) et comprenant n termes. La formule devient donc :

$$V_n = a\frac{(1+t)^n - 1}{(1+t) - 1}$$

$$\boxed{V_n = a\frac{(1+t)^n - 1}{t}}$$

<u>Exemple 1 :</u>

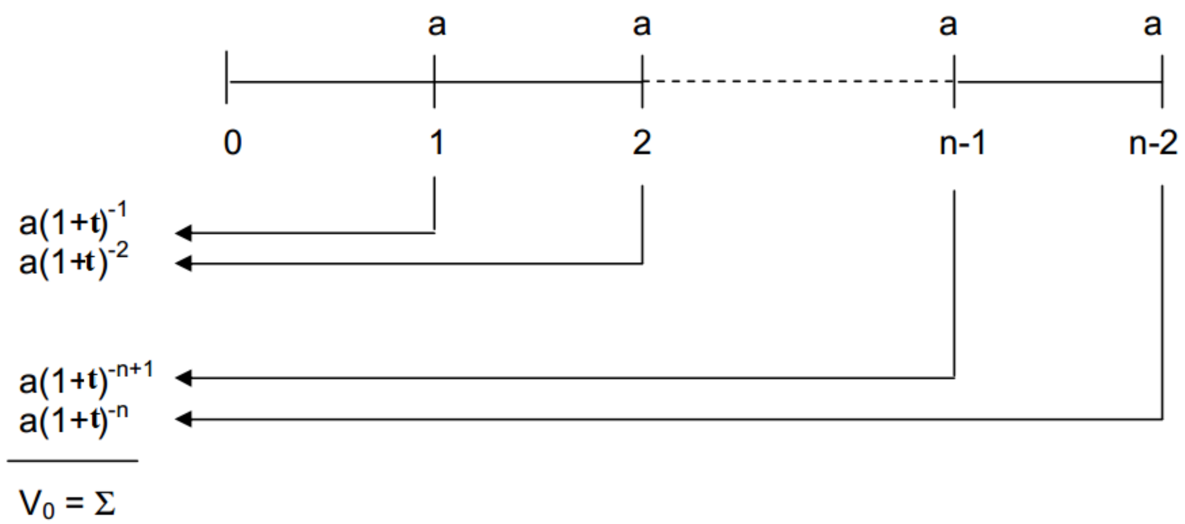
On place chaque année pendant 5ans, un capital de 5000 Dzd.

- Calculer la valeur acquise au moment du dernier versement, puis un an après le dernier versement (capitalisation annuelle au taux de 6%).
  a = 5000 , n=5, t=0.06

  - Valeur acquise après 5éme versement : $V5 = 5000 \times \frac{(1+0.06)-1}{0.06}$ = 28185,46 Dzd
  - Valeur un an après : $28185,46 \times 1.06 = 29876,27\ Dzd$
  - Intérêts acquis alors : 29876,27 – (5 × 5000) = **4876,27 Dzd**

2.1.3. La valeur actuelle

On appelle valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes de fin de période, la somme des annuités actualisées (V_0) exprimée à la date origine.



Si on note par :

V_0 : la valeur actuelle par la suite des annuités
a : l'annuité constante de fin de période
n : le nombre de périodes (d'annuités)
t : le taux d'intérêt par période de capitalisation

On a alors :

$V_0 = a(1+t)^{-1} + a(1+t)^{-2} + \ldots\ldots + a(1+t)^{-n+1} + a(1+t)^{-n}$

$V_0 = a\,[(1+t)^{-1} + a(1+t)^{-2} + \ldots\ldots + a(1+t)^{-n+1} + a(1+t)^{-n}]$

$V_0 = a\,(1+t)^{-1}\,[1+(1+t)^{-1} + a(1+t)^{-2} + \ldots\ldots + a(1+t)^{-n+2} + a(1+t)^{-n+1}]$

On a donc une suite géométrique de premier terme 1, de raison géométrique $q = (1+t)^{-1}$et comprenant n termes. La formule devient :

$$V_0 = a\,(1+t)^{-1}\,\frac{1-(1+t)^{-n}}{1-(1+t)^{-1}}$$

$$V_0 = a\,\frac{1-(1+t)^{-n}}{1+t-1}$$

$$V_0 = a\,\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

<u>Exemple 2 :</u>

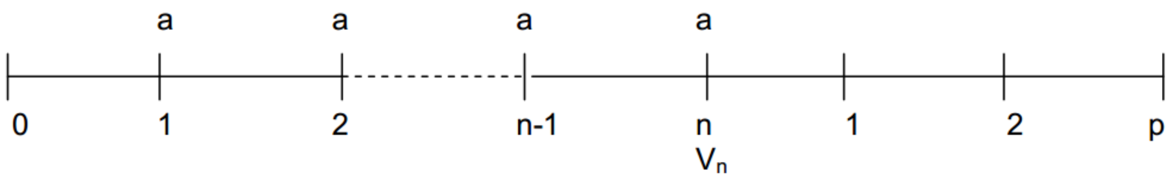
Quelle est la valeur actuelle au taux d'actualisation de 6% d'une suite d'annuité constante de 15000 Dzd versées à la fin de chaque année pendant 7ans.

a) La valeur actuelle de cette suite d'annuités constantes est donc :

$V_A = 15000 \frac{1-(1+0.06)^{-7}}{0.06}$

$V_A =$ **83730.57 Dzd**

2.1.2. La valeur acquise exprimée p périodes après le dernier versement



Soit V_n^p la valeur acquise de la suite des annuités constantes de fin de période exprimée p périodes après le dernier versement.

$V_n^p = V_n (1+t)^p$

$$V_n^p = a \frac{(1+t)^n - 1}{t} (1+t)^p$$

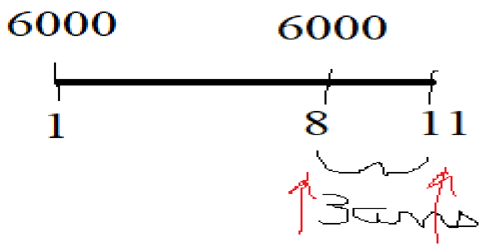
<u>Exemple :</u>

Quelle est à 6% la valeur acquise par 8 annuités constante de 6000 Dzd chacune.

a) Immédiatement après le dernier versement ;

b) 3 ans après le dernier versement.

a-



$V_n = 6000 \frac{(1+0.06)^8 - 1}{0.06}$

$V_n =$ **59380.48Dzd**

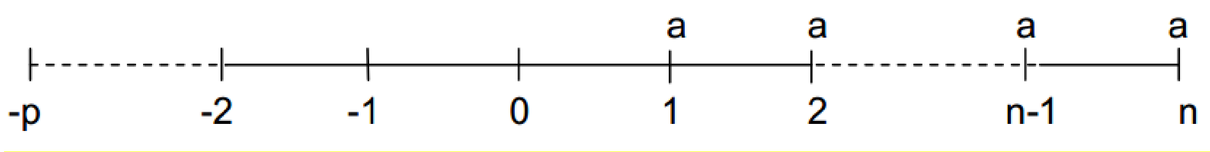
b-

Le raisonnement est comme j'ai un capital V8 et je veux savoir ma valeur acquise après 3ans :

$V_{11} = 6000 \frac{(1+0.06)^8 - 1}{0.06} * 1.06^3$

$V_{11} =$ **70720.83Dzd**

2.1.3. La valeur actuelle exprimée p périodes avant la date d'origine

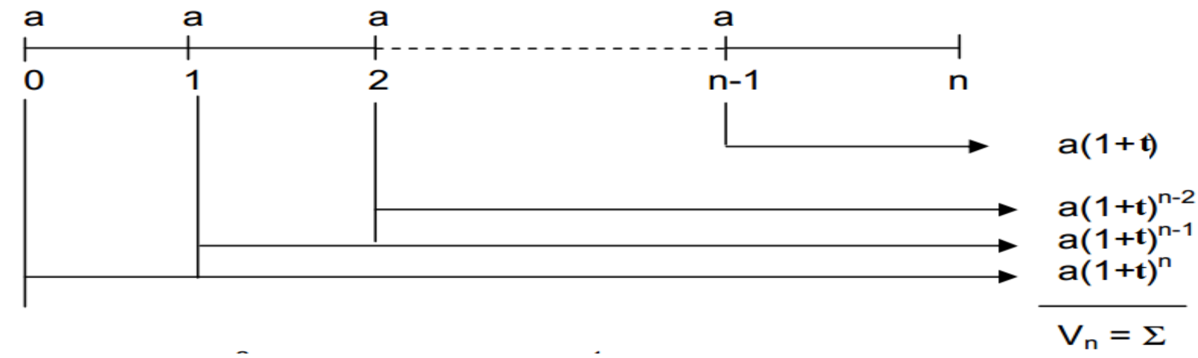


$$V_0^p = a\,\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}\,(1+t)^{-p}$$

2.2. Les annuités constantes en début de période

2.2.1. La valeur acquise

Si on considère que les flux sont versés en début de période, on obtient le graphique suivant :



On a alors :

Vn = $a(1+t) + a(1+t)^2 + \ldots + a(1+t)^{n-1} + a(1+t)^n$

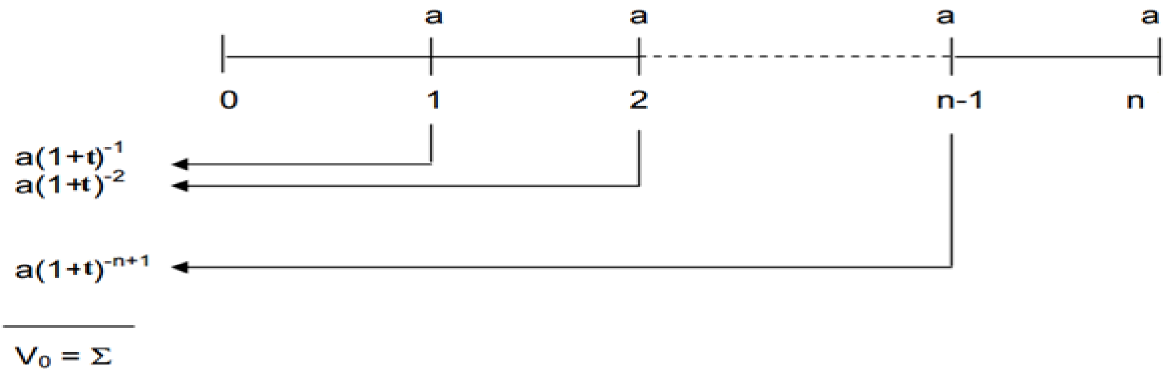
Vn= $a\,(1+t)\,[1 + (1+t) + (1+t)^2 + \ldots + (1+t)^{n-2} + (1+t)^{n-1}]$

On a donc une suite géométrique de premier terme 1, de raison géométrique q = (1+t)

D'où :

$$\boxed{V_n = a\,(1+t)\,\frac{(1+t)^n - 1}{t}}$$

2.2.3. La valeur actuelle



On a alors :

$V_0 = a + a(1+t)^{-1} + a(1+t)^{-2} + \ldots + a(1+t)^{-n+1}$

$V_0 = a\,[1+(1+t)^{-1} + a(1+t)^{-2} + \ldots + a(1+t)^{-n+1}]$

On a donc une suite géométrique de premier terme 1, de raison géométrique $q = (1+t)^{-1}$ et comprenant n termes. La formule devient :

$$V_0 = a\,\frac{1-(1+t)^{-n}}{1-(1+t)^{-1}}$$

$$V_0 = a\,\frac{(1+t)}{(1+t)}\,\frac{1-(1+t)^{-n}}{1-(1+t)^{-1}}$$

$$\boxed{V_0 = a\,(1+t)\,\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}}$$

<u>Exemple1 :</u>

En déposant un montant d'argent le premier de chaque mois du 1er janvier 2002 au 1er janvier 2003, on considère accumuler 10000Dzd au 1er janvier 2003.

Si le taux mensuel est de 0.005, quelle doit être la valeur du montant d'argent déposé chaque mois ?

$$V_n = a\,(1+t)\,\frac{(1+t)^n-1}{t}$$

$$a = \frac{1}{1.005}\,\frac{1000}{\frac{1.005^{13}-1}{0.005}}$$

a = 74.25 Dzd

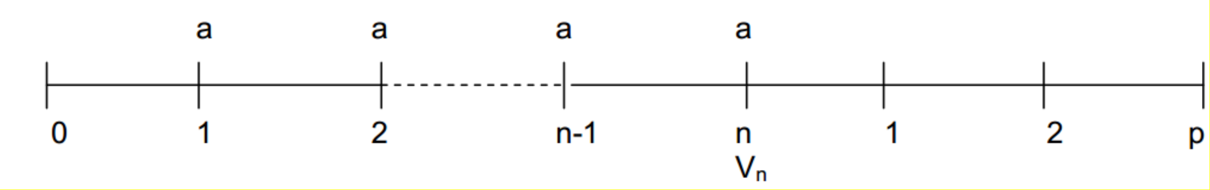
<u>Exemple 2 :</u>

Quel montant doit-on verser le premier janvier de chaque année et pendant 8ans pour rembourser un emprunt de 90000 Dzd avec un taux de 7% ?

Application directe de la formule $V_0 = a\,(1+t)\,\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$

a = 14086 Dzd

2.2.2. La valeur acquise exprimée p périodes après la date n



En se basant sur les mêmes principes que précédemment, on aura :

$$V_n^p = a\,(1+t)\,\frac{(1+t)^n - 1}{t}\,(1+t)^p$$

2.2.4. La valeur acquise exprimée p périodes avant la date d'origine n

$$V_0^p = V_0\,(1+t)^{-p}$$

$$V_0^p = a\,(1+t)\,\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}\,(1+t)^{-p}$$

3. Les annuités variables

3.1 Les annuités quelconque

3.1.1. Les annuités quelconques de fin de période

3.1.1.1. La valeur acquise

Si on note par :
V_n : la valeur acquise par la suite des annuités
a_p : l'annuité à la date p
n : le nombre de périodes (d'annuités)
t : le taux d'intérêt par période de capitalisation

Alors :

$Vn = a_n + a_{n-1}\,(1+t) + \ldots\ldots + a_2\,(1+t)^{n-2} + a_1\,(1+t)^{n-1}$

$$\boxed{V_n = \sum_{p=1}^{n} a_p\,(1+t)^{n-p}}$$

Exemple1 :

Quelle est la valeur actualisée et acquise d'une série de 7 placement annuels consécutifs en fin de périodes de resp 1200, 1000, 900, 1000, 1500, 1000 avec un taux intérêt de 7%,

3.1.1.2. La valeur actuelle

$V_0 = a_1\,(1+t)^{-1} + a_2\,(1+t)^{-2} \ldots\ldots + a_{n-1}\,(1+t)^{-n+1} + a_n\,(1+t)^{-n}$

$$\boxed{V_0 = \sum_{p=1}^{n} a_p\,(1+t)^{-p}}$$

3.1.2. Les annuités quelconques de début de période

3.1.2.1. La valeur acquise

$V_n = a_n\,(1+t) + a_{n-1}\,(1+t)^2\ \ldots..+ a_2\,(1+t)^{n-1} + a_1\,(1+t)^n$

$$\boxed{V_n = \sum_{p=1}^{n} a_p\,(1+t)^{n-p+1}}$$

3.1.2.1. La valeur actuelle

$V_0 = a_1 + a_2\,(1+t)^{-1}\ \ldots..+ a_{n-1}\,(1+t)^{-n+2} + a_n\,(1+t)^{-n+1}$

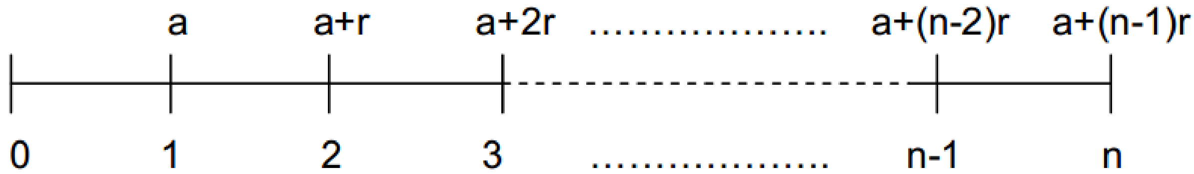
$$\boxed{V_0 = \sum_{p=1}^{n} a_p\,(1+t)^{-p+1}}$$

3.2 Les annuités en progression arithmétique

3.2.1. Les annuités de fin de période en progression arithmétique

3.2.1.1. La valeur acquise

Soit une progression arithmétique d'annuités de raison r représentée par le graphique suivant :



$$V_n = (a+(n-1)r)+(a+(n-2)r)(1+i)+\ldots\ldots+(a+2r)(1+i)^{n-3}+(a+r)(1+i)^{n-2}+a\,(1+i)^{n-1}$$

$$\boxed{V_n = \left(a+\frac{r}{t}\right)\frac{(1+t)^n-1}{t} - \frac{nr}{t}}$$

3.2.1.2. La valeur actuelle

On sait que : $V_n = V_0\,(1+t)^n$ Donc : $V_0 = V_n\,(1+t)^{-n}$

$$\boxed{V_0 = \left(a+\frac{r}{t}+nr\right)\left(\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}\right) - \frac{nr}{t}}$$

Exemple 2 :

Calculer la valeur acquise d'une suite d'annuités de fin de période, en progression arithmétique dont les caractéristiques sont les suivantes :
a = 1 0000 Dzd
n = 5ans
t = 5%
r = 100 Dzd

On a : $V_n = (a + \frac{r}{t})\frac{(1+t)^n - 1}{t} - \frac{nr}{r}$

D'où : $V_5 = (10000 + \frac{100}{0.05})\frac{(1+0.05)^5 - 1}{0.05} - \frac{5*100}{100}$

V_5 = 65760,894 Dzd

Exemple 3 :

Calculer la valeur actuelle d'une suite arithmétique de 20 annuités dont le premier terme est de 1000 Dzd et de raison 100 Dzd dont le taux est de 10%.
Il s'agit là d'appliquer directement la formule de la valeur actuelle :

$V_0 = \frac{(1+1.1)^{-20} - 1}{0.1}(1000 + \frac{100}{0.1} + 20.100) - \frac{20.100}{0.1}$

D'où : **V_0 = 14045,3 Dzd**

3.2.2. Les annuités de début de période en progression arithmétique

3.2.2.1. La valeur acquise

$$\boxed{V_n = \left(a + \frac{r}{t}\right) \times (1+t) \times \frac{(1+t)^n - 1}{t} - \frac{nr}{t} \times (1+t)}$$

3.2.2.2. La valeur actuelle

On sait que : $V_0 = V_n(1+t)^{-n}$

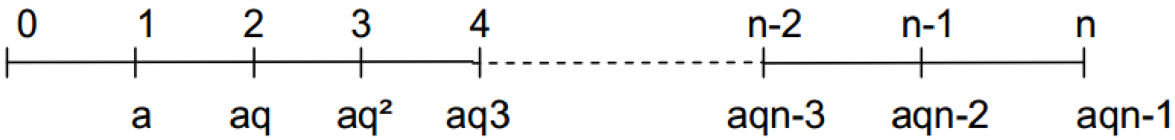
$$V_0 = V_n(1+i)^{-n} \iff V_0 = \left[\left(a + \frac{r}{i}\right) \times (1+i) \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} - \frac{nr(1+i)}{i}\right] \times (1+i)^{-n}$$

3.3 Les annuités en progression géométrique

3.3.1. Les annuités de fin de période en progression géométrique

3.3.1.1. La valeur acquise

Soit une progression géométrique d'annuités de fin de période de raison q représentée par le graphique suivant :



$$V_n = aq^{n-1} + aq^{n-2}(1+i) + \ldots\ldots + aq^2(1+i)^{n-3} + aq(1+i)^{n-2} + a(1+i)^{n-1}$$

$$V_n = a\ \underbrace{\left[(1+i)^{n-1} + q(1+i)^{n-2} + q^2(1+i)^{n-3} + \ldots\ldots\ldots + q^{n-2}(1+i) + q^{n-1}\right]}_{\text{Suite géométrique de } 1^{er} \text{ terme } (1+i)^{n-1}\text{, de raison } q\times(1+i)^{-1} = \frac{q}{1+i} \text{ et comprenant n termes}}$$

$$\boxed{V_n = a\left[\frac{q^n - (1+t)^n}{q-(1+t)}\right]}$$

3.3.1.2. La valeur actuelle

On sait que : $V_0 = V_n (1+t)^{-n}$

Alors :

$$\boxed{V_0 = \frac{a}{(1+t)^n} \times \left[\frac{q^n - (1+t)^n}{q-(1+t)}\right]}$$