

Corrigé de l'Exo-II ::

1. La loi de Fick : $\frac{dm}{dt} = -DS \frac{dC}{dx}$

Dans notre cas :

* La diffusion de (1) vers (2) ne modifie pas la concentration en (2) $\rightarrow C_B = 0$
 $\rightarrow dc = C_2 - C_1 = -C_1$ (lorsque on parle de concentration dans ce cas, il s'agit toujours du compartiment (1). $dc = -C$

* La distance entre les deux compartiments est représentée par l'épaisseur de la membrane (dx) $\rightarrow dx = e$

La loi prend la forme : $\frac{dm}{dt} = -DS \frac{C}{e}$ (1).

2. D'après la définition du flux massique ($\varphi = -DS \frac{C}{e}$), on doit écrire une relation entre ce flux et la concentration et le temps : Par définition de la concentration : $C = m / V \rightarrow m = CV$: dans le cas de la diffusion on assiste à une variation décroissante de masse et donc de concentration

$$\rightarrow dm = -V.dC$$

Si on divise les deux termes de l'équation par (S.dt) :

$$\frac{dm}{Sdt} = -V \frac{dC}{Sdt} \dots\dots\dots(2)$$

3. Pour arriver à la fonction de décroissance de la concentration du compartiment (1), on compare les équations (1) et (2) :

$$DS \frac{C}{e} = -\frac{VdC}{dt} \rightarrow \frac{dC}{C} = -\frac{DS}{Ve} dt \rightarrow \frac{dC}{C} = -Kdt \rightarrow \log C = -Kt + B$$

Pour calculer la constante d'intégration (B), nous avons les conditions : à $t=0 \rightarrow C=C_0$, Alors :

$$\log C = -0 + B \rightarrow \log C = -Kt + \log C_0 \rightarrow \log C/C_0 = -Kt \rightarrow C = C_0 e^{-Kt}$$

4. Quel unité peut-on donner à K ?

Comme $K = \frac{DS}{Ve}$, il suffit de remplacer les unités de chaque paramètre et l'unité est déterminée le plus simplement du monde, mais le but n'est pas là, le but de tester l'esprit de raisonnement pour dire que (Kt) est un exposant, et l'exposant par définition ne possède pas d'unité. Le temps (t) possède la seconde comme unité, alors (k) doit obligatoirement posséder l'unité inverse (s^{-1}).

5. Application numérique :

D'après les équations précédentes nous avons : $\log C/C_0 = -Kt \rightarrow \log \frac{dC}{C} =$

$$-\frac{DS}{Ve}t \quad t = -\frac{Ve}{DS} \log \frac{C}{C_0} \quad \rightarrow t = \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 75 \cdot 10^{-4}}{10^{-5} \cdot 15 \cdot 10^3} \log \frac{0.3}{6}$$

$$t = 5980 \text{ s} \approx 1.66 \text{ h} \approx 1 \text{ h } 36 \text{ min}$$