المحاضرة (1): تذكير في الجبر والمصفوفات

1- تعريف المصفوفة:

المصفوفة A ذات n سطر و k عمود، تتكون من العناصر a_{ij}، حيث a_{ij} هي أعداد حقيقية أو مركبة. ونكتب:

$A = [a_{ij}]_{n*k}$, $A_{(n,k)}$　　　j: عمود　, i: سطر

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2k} \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nk} \end{bmatrix}$$

$A_{(1,k)}$: شعاع خطي (أفقي)

$A_{(n,1)}$: شعاع عمودي

$n = k$: مصفوفة مربعة

2- تساوي مصفوفتين:

نقول عن مصفوفتين $A = [a_{ij}]_{n*k}$ و $B = [b_{ij}]_{m*l}$ أنهما متساويتين إذا كان:

- $n = m$ و $k = l$
- العناصر من نفس العمود والسطر في المصفوفتين متساوية $b_{ij} = a_{ij}$

3- مجموع مصفوفتين:

ليكن $A = [a_{ij}]_{n*k}$ و $B = [b_{ij}]_{n*k}$ مصفوفتان من نفس النوع، مجموع المصفوفتين A وهي مصفوفة $C = [c_{ij}]_{n*k}$ من نفس النوع حيث $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

مثال:

$$C = A + B \quad A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} ,$$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+0 \\ 3+5 & 4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$$

4- ضرب سلمية في مصفوفة:

جداء مصفوفة $A = [a_{ij}]_{n*k}$ بالسلمي λ هو المصفوفة: $\lambda A = \lambda[a_{ij}]$

مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} , \quad 2A = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2*1 & 2*2 \\ 2*3 & 2*4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

5- ضرب مصفوفتين:

لدينا $A = [a_{ij}]_{n*k}$ و $B = [b_{ij}]_{k*l}$، الشرط الأساسي لضرب مصفوفتين AوB بهذا الترتيب هو أن عدد أعمدة المصفوفة A يساوي عدد أسطر المصفوفة B.　$A_{n,k}$, $B_{k,l}$

$$A.B = C_{n,l}$$

مثال:　$A.B = C_{(2,3)}$　,　$A_{(2,3)}$, $B_{(3,3)}$

ملاحظات:

✓ $AB \neq BA$

- ✓ $A+B=B+A$
- ✓ $(A+B)+C=A+(B+C)$
- ✓ $A(B.C)=(A.B)C$
- ✓ $A(B+C)=AB+AC$
- ✓ $(B+C)A\neq AB+AC$
- ✓ $(B+C)A=BA+CA$
- ✓ $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$
- ✓ $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$

6- المصفوفة المتناظرة: *(Symmetric Matrix)*

هي مصفوفة مربعة عناصرها المتناظرة بالنسبة للقطر الرئيسي متساوية: $a_{ij}=a_{ij}\ \ ,i\neq j$

$$A\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ 0 & 5 & 4\\ 2 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

7- المصفوفة القطرية *(Diagonal Matrix)*

هي مصفوفة مربعة جميع العناصر خارج القطر الرئيسي تساوي 0: $a_{ij}=0\ \ ,i\neq j$

$$D=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

8- المصفوفة الوحدية *(Identify Matrix)*

هي مصفوفة قطرية جميع عناصر قطرها الرئيسي تساوي 1: $a_{ij}=0\ \ ,i\neq j$ ، $a_{ij}=1\ \ ,i\neq j$

$$I=\begin{pmatrix}1 & 0\ldots & 0\\ 0 & 1\ldots & 0\\ 0\ldots & 0\ldots & 1\end{pmatrix}$$

9- المصفوفة المثلثية:

A مصفوفة مربعة، تسمى مصفوفة مثلثية علوية أي عناصرها الواقعة أسفل القطر الرئيسي تساوي 0، $a_{ij}=0\ \ ,i>j$

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}5 & 2\ldots & 1\\ 0 & 2\ldots & 3\\ 0 & 0\ldots & 1\end{pmatrix}$$

B مصفوفة مربعة، تسمى مصفوفة مثلثية سفلية أي عناصرها الواقعة أعلى القطر الرئيسي تساوي 0، $a_{ij}=0\ \ ,i<j$

$$\mathrm{B}=\begin{pmatrix}5 & 0\ldots & 0\\ 9 & 2\ldots & 0\\ 4 & 3\ldots & 1\end{pmatrix}$$

10- المصفوفة المتناظرة عكسيا:

هي مصفوفة مربعة عناصر قطرها الرئيسي تساوي الصفر، وعناصرها المتناظرة بالنسبة لقطرها الرئيسي متعاكسة بالإشارة أي $a_{ij}=-a_{ij}$

مثال: $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -3\\ -1 & 0 & 2\\ 3 & -2 & 0\end{pmatrix}$

11- منقول مصفوفة: *(Transpose of Matrix)*

منقول مصفوفة A هو مصفوفة $'$ ، التي تقلب فيها الأسطر إلى أعمدة والأعمدة إلى أسطر. $A'=[a_{ij}]_{k*n}$ $\quad A=[a_{ij}]_{n*k}$

ملاحظات:

- ✓ إذا كانت $A'=A$، فإن هي مصفوفة متناظرة.
- ✓ إذا كان $_{(n,1)}$ هو شعاع عمودي فإن $X'_{(1,n)}$ شعاع أفقي

$$X'_{(1,n)} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{bmatrix} \quad ; \quad X_{(n,1)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$X'_{(1,n)} . X_{(n,1)} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + \dots x_n^2 = \sum x_i^2$$

- ✓ $(A')' = A$
- ✓ $(A+B)' = A' + B'$
- ✓ $(A.B)' = B'.A'$
- ✓ $(A.B.C)' = C'.B'.A'$

12- مقلوب مصفوفة:

$$A^{-1} = \frac{Adj\ A}{|A|} \quad , \quad \frac{B}{A} = B.A^{-1}$$

ملاحظات:

- ✓ $A^{-1}.A = A.A^{-1} = I$
- ✓ $(A^{-1})' = (A')^{-1}$
- ✓ $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$
- ✓ $(A.B.C)^{-1} = C^{-1}.B^{-1}.A^{-1}$

13- خصائص قوى مصفوفة:

- ✓ $(A^n)^m = A^{n*m}$, $A^n * A^m = A^{n+m}$, $A^2.A = A^3$, $A.A = A^2$
- ✓ $A^n = 0$ مصفوفة عديمة القوة.
- ✓ $A^n = A$ مصفوفة عقيمة أو أحادية القوة.

14- أثر المصفوفة: *(Trace of Matrix)*

أثر المصفوفة المربعة A هو مجموع عناصر القطر الرئيسي (يشترط أن تكون المصفوفة مربعة)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$Tr\,(A) = \sum a_{ij} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} \quad , i = j$$

ملاحظات:

- ✓ $Tr(I_n) = n$
- ✓ $Tr \lambda A = \lambda Tr\,(A)$
- ✓ $Tr(A+B) = Tr\,(A) + Tr(B)$
- ✓ $B_{(k,n)}$, $A_{(n,k)}$, $Tr(A.B) = Tr\,(B.A)$

15- الصيغة التربيعية: *(Quadratic Form)*

إذا كانت المصفوفة المتناظرة (n,n) والشعاع العمودي $X_{(n,1)}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad X_{(n,1)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$X'_{(1,n)}A_{(n,n)} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \dots \quad x_n]\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$X'A = [(x_1a_{11} + x_2a_{21} + \cdots + x_na_{n1}) \quad (x_2a_{12} + x_2a_{22} + \cdots + x_na_{n2}) \dots (x_1a_{n1} + x_2a_{n2} + \cdots + x_na_{nn})] \dots (\mathbf{1})$$

$$X'A = \left[\sum_{i=1}^{n} a_{i1}x_i \sum_{i=1}^{n} a_{i2}x_i \dots \sum_{i=1}^{n} a_{in}x_i\right]$$

$$X'A\,X = \left[\sum_{i=1}^{n} a_{i1}x_i \sum_{i=1}^{n} a_{i2}x_i \dots \sum_{i=1}^{n} a_{in}x_i\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$X'A\,X = \left[x_1 \sum_{i=1}^{n} a_{i1}x_i + \ x_2 \sum_{i=1}^{n} a_{i2}x_i + \cdots + \ x_n \ \sum_{i=1}^{n} a_{in}x_i\right]$$

$$X'A\,X = \left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j\right] \qquad (scalar\ or\ number\ matrix)$$