حل سلسلة التمارين رقم 01:

- التمرين الأول:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1- إيجاد منقول المصفوفة A:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2- حساب قيمة المحدد $|A|$:

$$|A| = -2 \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - (-1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|A| = -2(3-6) + (1-4) + 0$$

$$= 6 + (-3) = \boxed{3}$$

3- حساب مقلوب المصفوفة A:

$$A^{-1} = \frac{\mathrm{adj}\,A}{|A|} = \frac{\mathrm{cof}'A}{|A|}$$

← إيجاد مصفوفة العوامل المساعدة لـ A

$$\mathrm{cof}\,A = \begin{bmatrix} +\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & -\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} & +\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ -\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & +\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} & -\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ +\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} & -\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} & +\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{cof}\,A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & 3 \\ 4 & -5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{cof}'A = \mathrm{Adj}\,A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -5 \\ -3 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -5 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

التمرين الثاني :

1 - إيجاد محدد المصفوفة B ومحدد المصفوفة B' والمقارنة بينهما:

$$B' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{|B| = |B'|} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

التمرين الثالث :

$$\begin{cases} 3P_1 - P_2 = 4 \\ P_1 + P_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A_{(2,2)} \, P_{(2,1)} = Y_{(2,1)}$$

$$\Rightarrow A^{-1} A \, P = A^{-1} Y$$

$$\Rightarrow I P = A^{-1} Y$$

$$\Rightarrow P = A^{-1} Y$$

حساب A^{-1} :

$$|A| = 3 + 1 = 4 \neq 0$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

التمرين الرابع :

إذا كانت H' منقول المصفوفة H هي نفسها مقلوبها H^{-1} . نثبت أن $|H| = \pm 1$

$$H H^{-1} = I \Rightarrow H . H' = I$$

$$|H H'| = |I| \qquad A = B \Rightarrow |A| = |B|$$

$$|H| \, |H'| = 1 \qquad |AB| \Rightarrow |A| \, |B|$$

$$|H| \, |H'| = |H| \, |H| = 1 \qquad |A| = |A'|$$

$$|H|^2 = 1 \Rightarrow |H| = \pm 1$$

حل التمرين الخامس :

-(1

* $A^{-1} = \dfrac{\operatorname{adj} A}{|A|}$; $|A| = 2$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

* $B^{-1} = \dfrac{\operatorname{adj} B}{|B|}$; $|B| = 4$

$$B^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

* $A+B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

* $AB = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$

* $(AB)^{-1} = \dfrac{\operatorname{adj}(AB)}{|AB|}$; $|AB| = 8$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/8 & 7/8 \end{pmatrix}$$

* $B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/8 & 7/8 \end{pmatrix}$

* $(B^{-1})^{-1} = B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

* $(C')^{-1} = \dfrac{\operatorname{adj} C'}{|C'|}$

$C' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $|C'| = 2$

$$(C')^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$(C^{-1})' = (C')^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

2. ملاحظة :

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$(B^{-1})^{-1} = B$

$(C^{-1})' = (C')^{-1}$