المحور الثاني: الفائدة المركبة والدفعات

المحاضرة (1): الفائدة المركبة

تمهيد:

تطبق الفائدة المركبة على العمليات المالية طويلة الأجل، حيث كل فائدة مستحقة في نهاية المدة تضاف إلى المبلغ الأصلي، وتستثمر معه بنفس الشروط لغاية نهاية مدة التوظيف (مدة القرض)، وبالتالي هي جزء من رأس المال في نهاية كل فترة زمنية.

مفهوم الفائدة المركبة:

نقول عن مبلغ أنه أودع بفائدة مركبة، عندما يتم إضافة الفائدة البسيطة لهذه الفترة إلى المبلغ الأصلي لحساب الفائدة للفترة الموالية، وهكذا في نهاية كل فترة يتم إضافة الفائدة البسيطة الناتجة إلى المبلغ المحصل أو رأس المال، ثم يتم حساب الفائدة على أساس المبلغ والفوائد الناتجة سابقا.

مثال:

رأس مال قدره 100.000 دج، أودع في بنك بمعدل 6٪ بفائدة مركبة، كم سيعطي بعد 3 سنوات.

السنة (1): $I_1 = 100.000 \times 0,06 = 6000 DA$

$A_1 = 100000 + 6000 = 106000 DA.$

السنة (2)

$I_2 = 106000 \times 0,06 = 6360 DA$

$A_2 = 106000 + 6360 = 112360 DA$

السنة (3):

$I_3 = 112360 \times 0,06 = 6741,60 DA$

$A_3 = 112360 + 6741,6 = 119101,6 DA.$

تكوين الجملة والفائدة بمعدل فائدة مركبة:

لتكن الرموز التالية:

a: أصل المبلغ

i: معدل الفائدة

n: مدة القرض (مدة التوظيف)

يمكن استنتاج قانون الفائدة المركبة ابتداءا من احتساب فائدة السنة الأولى والسنوات التي تليها إلى غاية السنة n:

الفوائد في نهاية كل سنة:

1) $a \times i = I_1$

2) $a(1+i)i = I_2$

3) $a(1+i)^2 i = I_3$

⋮

n) $a(1+i)^{n-1} \times i = I_n$

القيمة المحصلة (المكتسبة) في نهاية كل سنة:

$n=1 \quad A_1 = a(1+i)$

$n=2 \quad A_2 = a(1+i)^2$

⋮

n $A_n = a(1+i)^n$

Scanné avec CamScanner

مثال:

مبلغ 100.000 دج وضع في بنك بمعدل 5٪ لمدة 10 سنوات، احسب القيمة المكتسبة خلال هذه المدة.

$$A_{10} = a(1+i)^{10}$$

$$A_{10} = 100.000(1+0,05)^{10}$$

$$A_{10} = 162889,46 \text{ DA}$$

قانون الفائدة المركبة:

لحساب الفائدة المركبة، يجب أولا حساب الجملة المكتسبة وذلك منا خلال طرح المبلغ الأصلي أو المستثمر من الجملة المكتسبة كما يلي:

$$I = A - a$$

$$I = a(1+i)^n - a$$

$$\boxed{I = a\left[(1+i)^n - 1\right]}$$

مثال:

1- احسب الفائدة الناتجة عن توظيف مبلغ 20.000 دج استثمر لمدة 5 سنوات بمعدل فائدة مركب 7٪

$$I = A - a = a\left[(1+i)^n - 1\right]$$

$$I = 20000\left[(1+0,07)^5 - 1\right]$$

$$I = 8051,02 \text{ DA}.$$

2- أودع شخص مبلغ قدره 72800 دج لدى البنك لمدة 6 سنوات، بمعدل فائدة مركبة 9,5٪.

* احسب فائدة السنة الأولى:

$$I_1 = a(1+i)^{n-1} \times i$$

$$I_1 = 72800(1+0,095)^0 \times 0,095$$

$$I_1 = 72800 \times 0,095$$

$$I_1 = 6916 \text{ DA}.$$

* احسب فائدة السنة الرابعة:

$$I_4 = a(1+i)^{4-1} \times i$$

$$I_4 = 72800(1,095)^3 \times 0,095$$

$$I_4 = 9080,23 \text{ DA}$$

* احسب الجملة المكتسبة:

$$A = a(1+i)^n$$

$$A = 72800(1,095)^6$$

$$A = 125492,015 \text{ DA}.$$

* احسب الفائدة المركبة الناتجة عند نهاية مدة التوظيف:

$$I = A - a$$

$$I = 125492,015 - 72800$$

$$I = 52692,015 \text{ DA}$$

أو:

$$I = a\left[(1+i)^n - 1\right]$$

$$I = 72800\left[(1,095)^6 - 1\right]$$

$$I = 52692,015 \text{ DAD}$$

Scanné avec CamScanner

المحاضرة (2): عمليات على قانون الفائدة المركبة

حساب عناصر الجملة

* القانون الأساسي لحساب أصل الجملة:

القيمة الحالية (أصل الجملة) تعرف بأنها القيمة الأصلية لرأس المال عوقت قيمته في نهاية مدة التوظيف، وعليه فإن القيمة الحالية تتحدد بطرح الفائدة المركبة من هذا المبلغ.

$$A = a(1+i)^n$$

$$a = \frac{A}{(1+i)^n}$$

$$\boxed{a = A(1+i)^{-n}}$$

كما يمكن حساب المبلغ الأصلي بدلالة قانون الفائدة وذلك كما يلي:

$$I = a\left[(1+i)^n - 1\right]$$

$$\boxed{a = \frac{I}{\left[(1+i)^n - 1\right]}}$$

مثال:

أودع أحد الأشخاص مبلغا ما في بنك بمعدل فائدة 10٪ وبعد 4 سنوات وجد أن الرصيد في البنك قد وصل إلى 48000 دج. احسب المبلغ الذي أودعه هذا الشخص.

$A = 48000\ DA$, $n = 4\ ans$

$i = 0,1$

$$a = A(1+i)^{-n}$$

$$a = 48000\ (1+0,1)^{-4}$$

$$a = 48000 \times 0,683013$$

$$a = 32784,64\ DA$$

* القانون الأساسي لحساب معدل الفائدة المركبة:

معدل الفائدة المركبة أو النسبة المطبقة على المبلغ الموضوع والذي يرمز له بـ i، يمكن حسابه انطلاقا من العلاقة العامة لجملة الفائدة المركبة:

$$A = a(1+i)^n$$

$$(1+i)^n = \frac{A}{a}$$

$$1+i = \sqrt[n]{\frac{A}{a}} = \left(\frac{A}{a}\right)^{1/n}$$

$$\boxed{i = \sqrt[n]{\frac{A}{a}} - 1 = \left(\frac{A}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}$$

مثال:

احسب معدل الفائدة السنوي الذي وظف على أساسه مبلغ 15000 دج لمدة 4 سنوات فأنتج قيمة مكتسبة في نهاية مدة التوظيف قدرها 40000 دج.

$$i = \left(\frac{A}{a}\right)^{1/n} - 1$$

$$i = \left(\frac{40000}{15000}\right)^{\frac{1}{4}} - 1 = 0,34 \simeq 34\%$$

Scanné avec CamScanner

$$n = \frac{\ln(A/a)}{\ln(1+i)}$$

أو من خلال علاقة الفائدة المركبة:

$$I = a\left[(1+i)^n - 1\right]$$

$$(1+i)^n = \frac{I}{a} + 1$$

$$n \ln(1+i) = \ln\left(\frac{I}{a}+1\right)$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{I}{a}+1\right)}{\ln(1+i)}$$

مثال:

استثمر مبلغ مالي قدره 4000 دج بمعدل مركب 5٪، فبلغت جملة العكسية بعد مدة من الزمن 7491,8 دج.

- احسب مدة الاستثمار:

$$n = \frac{\ln(A/a)}{\ln(1+i)}$$

$$n = \frac{\ln(7491{,}8/4000)}{\ln(1+0{,}05)}$$

$$n = 12{,}86$$

$$0{,}86 \times 360 = 310 \text{ jours}$$

مدة الاستثمار هي 12 سنة و 310 يوم

ومن خلال العلاقة العامة للفائدة المركبة

$$I = a\left[(1+i)^n - 1\right]$$

$$(1+i)^n - 1 = \frac{I}{a}$$

$$(1+i)^n = \frac{I}{a} + 1$$

$$1+i = \sqrt[n]{\frac{I}{a}+1}$$

$$i = \sqrt[n]{\frac{I}{a}+1} - 1$$

مثال:

احسب معدل الفائدة المركبة، إذا كان المبلغ الموظف هو 5000 دج، لمدة 4 سنوات، وكانت فائدة السنوات الكل مقدرة بـ 1432,34 دج:

$$i = \sqrt[n]{\frac{I}{a}+1} - 1$$

$$i = \sqrt[4]{\frac{1432{,}34}{5000}+1} - 1$$

$$i = 0{,}065 = 6{,}5\ \%$$

القانون الأساسي لحساب المدة:

- يمكن حساب مدة التوظيف من خلال علاقة الجملة كالتالي:

$$A = a(1+i)^n$$

$$(1+i)^n = \frac{A}{a}$$

$$n \ln(1+i) = \ln\left(\frac{A}{a}\right)$$

Scanné avec CamScanner