# الجذور المميزة (eigenvalues)

# والمتجهات المميزة المرافقة لها (eigenvectors):

بالنسبة لمصفوفة مربعة $A_{n.n}$، المعادلة المميزة (Characteristic equation) تعطى كالآتي:

$$|A - \lambda I| = 0$$

مع الإشارة إلى أن قيم الجذور (أو القيم) المميزة لمصفوفة معينة قد تأخذ قيما مركبة.

**مثال:** أوجد قيم الجذور المميزة وقيم المتجهات المميزة الموافقة لها للمصفوفة A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

**1- إيجاد قيم الجذور المميزة (eigenvalues) للمصفوفة A:**

$$|A-\lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\Rightarrow \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\Rightarrow \left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2-0 \\ 3-0 & 0-\lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\Rightarrow \left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & -\lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)(-\lambda) - (2)(3) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda-3)(\lambda+2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

**2- إيجاد قيم المتجهات المميزة (eigenvectors) للمصفوفة A:**

أ– من أجل : $\lambda = \lambda_1 = 3$

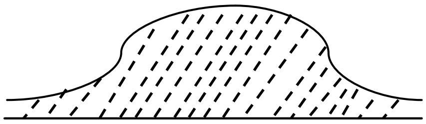
$$\begin{pmatrix} A & - & \lambda I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1-3 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2\,c_{11} + 2\,c_{21} = 0 \\ 3\,c_{11} - 3\,c_{21} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \mathbf{c_{11} = c_{21}}$$

**بالتطبيع:** مساحة دالة التوزيع الطبيعي تساوي (1) لأن مجموع الاحتمالات يساوي 1، نستخدم التطبيع للحصول على نتيجة واحدة.



$$c_{11}^2 + c_{21}^2 = 1 \Rightarrow c_{11}^2 + c_{11}^2 = 1$$
$$\Rightarrow 2\,c_{11}^2 = 1$$
$$\Rightarrow c_{11}^2 = 1/2$$
$$\Rightarrow c_{11} = c_{21} = 1/\sqrt{2}$$ ... (نأخذ فقط القيم الموجبة)

إذن أول متجه مميز هو: $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

ب- من أجل : $\lambda = \lambda_2 = -2$

$$\begin{pmatrix} A & - & \lambda I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1+2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3\,c_{12} + 2\,c_{22} = 0 \\ 3\,c_{12} + 2\,c_{22} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \mathbf{c_{12} = (-2/3)\,c_{22}}$$

**بالتطبيع:** ( للحصول على حل واحد) .

$$c_{12}^2 + c_{22}^2 = 1 \Rightarrow [(-2/3)\,c_{22}]^2 + c_{22}^2 = 1$$
$$\Rightarrow (13/9)\;c_{22}^2 = 1$$
$$\Rightarrow c_{22}^2 = 9/13$$
$$\Rightarrow c_{22} = 3/\sqrt{13}$$ ... (نأخذ فقط القيم الموجبة)
$$\Rightarrow c_{12} = -2/\sqrt{13}$$

إذن ثاني متجه مميز هو: $\begin{pmatrix} -2/\sqrt{13} \\ 3/\sqrt{13} \end{pmatrix}$

**وظيفة:** أوجد قيم الجذور المميزة وقيم المتجهات المميزة الموافقة لها للمصفوفة A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

## خصائص الجذور المميزة والمتجهات المميزة المرافقة لها:

1) المصفوفتان A و A′ لهما نفس الجذور المميزة (eigenvalues).

2) مجموع الجذور المميزة لمصفوفة (Y) يساوي أثر المصفوفة (Y) أي مجموع عناصر القطر الرئيسي لهذه المصفوفة.

**مثال1:**

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

(المعادلة المميزة $0= (1-\lambda)\,(2-\lambda)$)...

$Tr(B) = 1 + 2 \Rightarrow Tr(B) = 3$

$\lambda_1 + \lambda_2 = (1) + (2) = 3$

**مثال2:**

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = (5-\sqrt{17})/\,2 \\ \lambda_2 = (5+\sqrt{17})/\,2 \end{cases}$$

(المعادلة المميزة $0= \lambda^2 - 5\lambda + 2$)...

$Tr(B) = 4 + 1 \Rightarrow Tr(B) = 5$

$\lambda_1 + \lambda_2 = (5-\sqrt{17})/\,2 + (5+\sqrt{17})/\,2 = 5$

3) حاصل ضرب الجذور المميزة المصفوفة (A) يساوي محدد هذه المصفوفة ($|A|$)

$|A| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} |A| = (1)\,(2) = 2 \\ \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = (2)(1) = 2 \end{cases}$$

4) رتبة مصفوفة ما يساوي عدد الجذور المميزة غير المعدومة.

**مثال:**

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 5 \end{cases}$$

$Rank(A) = \rho(A) = 1$

5) الجذور المميزة للمصفوفة ($A^{-1}$) هي مقلوب الجذور المميزة للمصفوفة (A)، ولكن المتجهات المميزة المرافقة لها فهي نفسها.

**مثال:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/2 & 1/2 \\ 0/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1/2 \end{cases}$$

6) بالنسبة للمصفوفات المتناظرة (X′ = X) كل الجذور المميزة هي أعداد حقيقية.

7) بالنسبة للمصفوفات المتناظرة، المتجهات المميزة مستقلة إحصائيا مثنى مثنى ( perwise orthognal).

$$C_1' C_2 = 0_{1.1}, \quad C_2' C_1 = 0_{1.1}$$

**مثال:**

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 5 \end{cases}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$C_1' C_2 = 0 \Rightarrow [(-1/\sqrt{5})(2/\sqrt{5}) + (2/\sqrt{5})(1/\sqrt{5})] = [(-2/5) + (2/5)] = [0]$$
$$C_2' C_1 = 0 \Rightarrow [(2/\sqrt{5})(-1/\sqrt{5}) + (1/\sqrt{5})(2/\sqrt{5})] = [(-2/5) + (2/5)] = [0]$$

*** نظرية الأطياف (The Spectral Theorem):**

المصفوفة القطرية المستقلة إحصائيا للمتجهات المميزة ($\Lambda$) تعطى كالتالي:

المصفوفة ($A$) متناظرة حيث:

$$\Lambda = C' A C = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

**مثال**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 4 \end{cases}, \quad C_1^* = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/\sqrt{5} \\ \sqrt{2}/\sqrt{5} \end{pmatrix}, \quad C_2^* = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/\sqrt{5} \\ \sqrt{3}/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$C = [C_1^*, C_2^*] = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/\sqrt{5} & \sqrt{2}/\sqrt{5} \\ \sqrt{2}/\sqrt{5} & \sqrt{3}/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$C' A C = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/\sqrt{5} & \sqrt{2}/\sqrt{5} \\ \sqrt{2}/\sqrt{5} & \sqrt{3}/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 1 \\ 2 & \sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/\sqrt{5} & \sqrt{2}/\sqrt{5} \\ \sqrt{2}/\sqrt{5} & \sqrt{3}/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$