المحاضرة الثانية: مذكرة في الجبر والمصفوفات

1- تعريف

المصفوفة A تحتوي على n سطرا و k عمودا وتتكون من العناصر $[a_{ij}]$، i سطر، j عمود. مع العلم أن a_{ij} عبارة عن أعداد حقيقية أو مركبة.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2k} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nk} \end{bmatrix}$$

$A = [a_{ij}]_{n\times k}$

$A_{(n\times k)}$

$(1, k) \rightarrow$ شعاع خطي

$(n,1) \rightarrow$ شعاع عمودي

$n = k \rightarrow$ مصفوفة مربعة

2- تساوي مصفوفتين (A = B)

إذا كانت لدينا مصفوفتان $A = [a_{ij}]_{n\times k}$ و $B = [b_{ij}]_{m\times l}$، فهناك شرطان حتى تكون هاتان المصفوفتين متساويتين:

أ- أن تكونا من نفس الدرجة: $n = m$ و $k = \ell$.

ب- العناصر من نفس السطر والعمود في المصفوفتين متساوية: $a_{ij} = b_{ij}$.

3- جمع مصفوفتين

$C = A + B$

$C_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

لجمع مصفوفتين يشترط أن تكون المصفوفتان من نفس الدرجة والمصفوفة الناتجة من نفس الدرجة.

4- ضرب سلمية في مصفوفة

$\lambda A = \lambda[a_{ij}] \quad \rightarrow \forall\ i,j.$

5- ضرب مصفوفتين

$C = A \,.\, B$

الشرط الأساسي لضرب مصفوفتين A و B بهذا الترتيب، هو أن عدد الأعمدة للمصفوفة A يساوي عدد صفوف المصفوفة B.

$A_{(n\times k)}, \qquad B_{(k\times m)}$

$C_{(n\times m)} = A \,.\, B$

مثال:

$A = [a_{ij}]_{(4\times 6)} \qquad B = [b_{ij}]_{(6\times 3)}$

$C = [c_{ij}]_{(4\times 3)} = A \,.\, B$

ملاحظات:

لا يمكن الحصول على B.A، إذن $A.B \neq B.A$

* $A+B = B+A$
* $(A+B)+C = A+(B+C)$
* $A.(B+C) = A.B + A.C$
* $(B+C).A \neq A.B + A.C$
* $(B+C).A = B.A + C.A$
* $\lambda.(B+C) = \lambda.B + \lambda.C$
* $(\gamma+\lambda).A = \gamma A + \lambda A$

6 -المصفوفة المتناظرة (Symmetric Matrix)

هي مصفوفة مربعة عناصرها المتناظرة بالنسبة للقطر الرئيسي متساوية.

$a_{ij} = a_{ji}\ ,\ i \neq j$

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & 0 & 2 & 5 \\ 0 & \mathbf{7} & 4 & 4 \\ 2 & 4 & \mathbf{6} & 6 \\ 5 & 4 & 6 & \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

7- منقول المصفوفة (Transpose of a Matrix)

منقول المصفوفة (A) هي المصفوفة (A′) التي تقلب فيها أسطر المصفوفة (A) إلى أعمدة وأعمدتها إلى صفوف.

$$A = [a_{ij}]_{n\times k} \qquad , A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix}$$

$$A' = [a_{ji}]_{k\times n} \qquad , A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & & & \\ a_{1k} & a_{2k} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix}$$

ملاحظات:

* إذا كانت المصفوفة A متناظرة، فإن: $A = A'$
* إذا كان $X_{(n1)}$ شعاع عمودي، فإن $X'_{(1n)}$ شعاع أفقي.

$$X_{(n1)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad X'_{(1n)} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}$$

$$X'_{(1n)} \,.\, X_{(n1)} = \sum x_i^2 \rightarrow \text{(Scalar number)}$$

* $(A')' = A$
* $(A + B)' = A' + B'$
* $(A \,.\, B)' = B' \,.\, A'$
* $(A \,.\, B \,.C)' = C' \,.\, B' \,.\, A'$

8- مقلوب مصفوفة (Inverse of a Matrix)

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj } A}{|A|}$$

ملاحظات:

* $A^{-1} \,.\, A = A \,.\, A^{-1} = I$
* $(A \,.\, B)^{-1} = B^{-1} \,.\, A^{-1}$

* $(A \,.\, B \,.\, C)^{-1} = C^{-1} \,.\, B^{-1} \,.\, A^{-1}$
* $(A')^{-1} = (A^{-1})'$

9- المصفوفة القطرية (Diagonal Matrix)

هي مصفوفة مربعة جميع العناصر خارج قطرها الرئيسي تساوي الصفر.

$a_{ij} = 0 \,,\, i \neq j$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -3 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

10- المصفوفة الوحدية (Identity Matrix)

هي مصفوفة قطرية جميع عناصر قطرها الرئيسي تساوي الواحد.

$a_{ij} = 1 \,,\, i = j$

$a_{ij} = 0 \,,\, i \neq j$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots\dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots\dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots\dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots\dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots\dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots\dots & \lambda \end{bmatrix}$$

$$I A = A I = A$$

11– المصفوفة المثلثية (Triangular Matrix)

المصفوفة المثلثية من أعلى A هي مصفوفة مربعة عناصرها الواقعة أسفل القطر الرئيسي تساوي الصفر. أما المصفوفة المثلثية من أسفل B فهي المصفوفة المربعة التي عناصرها الواقعة أعلى القطر الرئيسي تساوي الصفر.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 \dots 9 \\ 0 & 7 \dots 2 \\ \vdots & \\ 0 & 0 \dots 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 6 & 0 \dots 0 \\ 4 & 3 \dots 0 \\ \vdots & \\ 8 & 2 \dots 9 \end{bmatrix}$$

12– المصفوفة المتناظرة عكسيا (Negative Symmetric Matrix)

هي مصفوفة مربعة عناصر قطرها الرئيسي معدومة، وعناصرها المتناظرة بالنسبة للقطر الرئيسي متساوية بالقيمة المطلقة ومتعاكسة بالإشارة.

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 0 & 2 & 5 \\ 0 & \mathbf{0} & -4 & -4 \\ -2 & 4 & \mathbf{0} & -6 \\ -5 & 4 & 6 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

13– المصفوفة عديمة القوة: *خصائص قوى مصفوفة:

* $A . A = A^2$
* $A . A^2 = A^3$
* $A^n . A^m = A^{n+m}$
* $(A^n)^m = A^{n.m}$

إذا كانت A مصفوفة من الدرجة (m,m)، نقول أنها عديمة القوة من الدرجة (n) إذا كانت $A^n = 0$. أما إذا كان $A^n = A$ فإن المصفوفة A **عقيمة (أو حيادية القوة)** **(Idempotent Matrix)**.

14- أثر المصفوفة (Trace of a Matrix)

أثر المصفوفة المربعة A هو مجموع عناصر القطر الرئيسي، (يشترط لإيجاد الأثر أن تكون المصفوفة مربعة).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots\dots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} \dots\dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$Tr(A) = \sum a_{ij} \quad , i = j$$

$$Tr(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

ملاحظات:

* $Tr\, I = n$
* $Tr\, \lambda A = \lambda\, Tr\, A$
* $Tr(A + B) = Tr\, A + Tr\, B$
* $Tr(A \,.\, B) = Tr(B \,.\, A) \quad \dots \quad A_{(n,k)}\, B_{(k,n)}$

إذا كانت $(A^n = A)$، فإن أثر A يساوي رتبة A، $Tr\ A = rank\ A$

15- الصيغة التربيعية (Quadratic Form)

إذا كانت المصفوفة المتناظرة $A_{(n,n)}$ والشعاع العمودي $X_{(n.1)}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad X_{(n,1)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$X'_{(1,n)} A_{(n,n)} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots\dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots\dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$X' A = [\ (x_1\, a_{11} + x_2\, a_{21} + \dots + x_n\, a_{n1})\ (x_1\, a_{12} + x_2\, a_{22} + \dots + x_n\, a_{n2}) \dots (x_1\, a_{1n} + x_2\, a_{2n} + \dots + x_n\, a_{nn})\ ] \qquad \dots (1)$$

$$X' A = [\ \sum_{i=1}^{n} a_{i1}\, x_i \quad \sum_{i=1}^{n} a_{i2}\, x_i \dots \sum_{i=1}^{n} a_{in}\, x_i\ ]$$

$$X' A X = [\ \sum_{i=1}^{n} a_{i1}\, x_i \quad \sum_{i=1}^{n} a_{i2}\, x_i \quad \dots \quad \sum_{i=1}^{n} a_{in}\, x_i\ ] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$X' A X = [\ x_1 \sum_{i=1}^{n} a_{i1}\, x_i + x_2 \sum_{i=1}^{n} a_{i2}\, x_i + \dots + x_n \sum_{i=1}^{n} a_{in}\, x_i\ ]$$

$$X' A X = [\ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j\ ] \qquad \text{(Scalar or number matrix)}$$

16- المصفوفة المحددة (Definite Matrix)

تكون المصفوفة $X' \ A \ X$ موجبة محددة (positive definite) إذا كانت هذه الصيغة : $X' \ A \ X > 0 : \forall X \neq 0$. وتكون $X' \ A \ X$ موجبة شبه محددة (positive semi definite) إذا كانت: $X' \ A \ X \geq 0 : \forall \ X \neq 0$. وتكون سالبة محددة إذا كان: $X' \ A \ X < 0 : \forall \ X \neq 0$ ، بينما تكون سالبة شبه محددة إذا كان: $X' \ A \ X \leq 0 : \forall \ X \neq 0$.

17- المشتقات في الجبر الخطي

لدينا X، A شعاعان عموديان:

$$A_{(n,1)} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad X_{(n,1)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$A' \ X = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$A' \ X = \begin{pmatrix} a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \end{pmatrix}$$

$$\frac{\mathbf{d \ A' \ X}}{\mathbf{d \ xi}} = \ ?$$

$$\frac{\mathbf{d \ A' \ X}}{\mathbf{d \ xi}} = \begin{pmatrix} \frac{d \ A' \ X}{d \ x1} \\ \frac{d \ A' \ X}{d \ x2} \\ \vdots \\ \frac{d \ A' \ X}{d \ xn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\mathbf{d \ A' \ X}}{\mathbf{d \ xi}} = \mathbf{A}$$

18- مشتقة الصيغة التربيعية

$$X'_{(1,n)} \ A_{(n,n)} \ X_{(n,1)} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$X' A = [\ (x_1\ a_{11} + x_2\ a_{21} + \ldots + x_n\ a_{n1})\ (x_1\ a_{12} + x_2\ a_{22} + \ldots + x_n\ a_{n2})$

$\ldots\ (x_1\ a_{1n} + x_2\ a_{2n} + \ldots + x_n\ a_{nn})\ ]$ … (عد إلى المعادلة رقم 1)

$X' A X = [\ (x_1^2\ a_{11} + \underline{x_1\ x_2\ a_{21}} + \ldots + \underline{x_1\ x_n\ a_{n1}})\ (\underline{x_1\ x_2\ a_{12}} + x_2^2\ a_{22} +$

$\ldots + \underline{x_2\ x_n\ a_{n2}})\ \ldots\ (\underline{x_n\ x_1\ a_{1n}} + \underline{x_n\ x_2\ a_{2n}} + \ldots + x_n^2\ a_{nn})\ ]$

$X' A X = [\ x_1^2\ a_{11} + 2\ x_1\ x_2\ a_{12} + 2\ x_1\ x_n\ a_{1n} + x_2^2\ a_{22} + 2\ x_2\ x_n\ a_{2n}$

$+ x_n^2\ a_{nn} + \ldots\ ]$

$$\frac{\mathbf{d\,X'\,A'\,X}}{\mathbf{d\,xi}} = \begin{pmatrix} \frac{d\,A'\,X}{d\,x1} \\ \frac{d\,A'\,X}{d\,x2} \\ \vdots \\ \frac{d\,A'\,X}{d\,xn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,a_{11}x_1 + 2\,a_{12}x_2 + \ldots + 2\,a_{1n}\,x_n \\ 2\,a_{21}x_1 + 2\,a_{22}x_2 + \ldots + 2\,a_{2n}\,x_n \\ \vdots \\ 2\,a_{n1}x_1 + 2\,a_{n2}x_2 + \ldots + 2\,a_{nn}\,x_n \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\,X'\,A'\,X}{d\,xi} = 2 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots\ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

$$\frac{\mathbf{d\,X'\,A'\,X}}{\mathbf{d\,xi}} = \mathbf{2\,A\,X = 2\,A'\,X}$$ (لأن A متناظرة)

19- بعض الأمثلة عن مشتقات المصفوفات

$$\frac{d\,\beta'\,X'\,Y}{d\,\beta} = X'\,Y \qquad \frac{d\,Y'\,X\,\beta}{d\,\beta} = X'\,Y \qquad \frac{d\,X'\,X}{d\,x} = 2\,X$$

$$\frac{d\,X'\,\beta\,X}{d\,x} = (\beta+\beta')\,X \qquad \frac{d\,\beta'\,X'\,X\,\beta}{d\,\beta} = 2\,X'\,X\,\beta$$

مراجعة القيمة المتوقعة، التباين – التباين المشترك (Expected (value,Variance- Covariance :

1- القيمة المتوقعة (الوسط الحسابي)

القيمة المتوقعة تبيّن القيمة المتوسطة التي تتوزع حولها قيم المتغير آخذة بعين الاعتبار تكرار كل مشاهدة أو احتمال وقوعها.

$$E(X) = \mu_x = \overline{X}$$

$$\overline{X} = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i / n$$

بعض خصائص القيمة المتوقعة

1) $E(c) = \sum_{i=1}^{n} c P(x_i) = c \sum_{i=1}^{n} P(x) = c(1) = c$ $\rightarrow$ c ثابت

2) $E(c X_i) = \sum_{i=1}^{n} c x_i P(x_i) = c \sum_{i=1}^{n} x_i P(x) = c E(X)$

3) $E(Y \pm X) = E(Y) \pm E(X)$

4) $E(Y X) = E(Y) . E(X)$ $\rightarrow$ بشرط أن يكون المتغيران مستقلين فيما بينهما

$$\overline{X}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} xi}{n1}$$ الوسط الحسابي للعينة الأولى

$$\overline{X}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} xi}{n2}$$ الوسط الحسابي للعينة الثانية

$E(\overline{X}_i) = \mu$ متوسط متوسطات جميع العينات = متوسط المجتمع الإحصائي:

2- التباين – التباين المشترك

أ- التباين (Variance): عبارة عن مقياس يبين تشتت القيم حول المتوسط.

$$VAR(X) = \sigma_x^2 = E[X - E(X)]^2 = \sum_{i=1}^{n} (X-\mu_x)^2 P(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (xi-\overline{x})^2}{n-1}$$

$$VAR(X) = E[X^2 - 2X\mu_x + \mu_x^2] = E[X^2] - 2\mu_x E(X) + E[\mu_x^2]$$
$$= E[X^2] - 2\mu_x^2 + \mu_x^2 = \mathbf{E[X^2] - \mu_x^2}$$

بعض خصائص التباين

1) $Var(c) = 0$ $\rightarrow$ ثابت c

$$= E(c - E(c))^2 = E(c - c)^2 = 0$$

2) $Var(c X_i) = E(cx - E(cx))^2 = E(cx - c E(x))^2$

$$= c^2 E(x - E(x))^2 = c^2 VAR(X)$$

3) $Var(X+Y) = E[(X+Y) - E(X+Y)]^2 = E[(X+Y) - E(X) - E(Y)]^2 = E[(X - E(X)) + (Y - E(Y))]^2$

$$= E[(X - E(X))^2 + (Y - E(Y))^2 + 2(X - E(X)).(Y - E(Y))]$$

$$= E(X - E(X))^2 + E(Y - E(Y))^2 + 2E(X - E(X)).(Y - E(Y))$$

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$$

ب- التباين المشترك

$$Cov(X,Y) = E[(X - E(X)).(Y - E(Y))]$$

$$= \sum_{X=1}^{n} \sum_{Y=1}^{n} (X - E(X)).(Y - E(Y)).P(x,y)$$

$$Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X,Y)$$

التباين المشترك (Covariance) بين متغيرين يقصد به مقياس الارتباط الخطي بينهما أو لتغيرهما معا. كما يجدر التذكير بأن **معامل الارتباط لبيرسون** (Pearson Coefficient of Correlation) بين أي متغيرين هو:

$$r_{xy} = = \frac{cov(x,y)}{\sqrt{(var(x)var(y))}} = \frac{cov(x,y)}{\sigma x \, \sigma y}$$

σ_x، σ_y هما الانحراف المعياري للمتغيرين (x) و (y) على التوالي.

إذا كان : $Cov(X,Y) = 0$ فهذا يعني أن x و y لا يؤثران على بعضهما، أي لا يوجد بينهما ارتباط (مستقلان).

$$Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y)$$

وإذا كان يوجد بينهما ارتباط، فإن:

$$Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y) \pm 2Cov(X,Y)$$

$$Cov(X,Y) = E[(X - E(X)).(Y - E(Y))]$$

$$= E[(X - \bar{X}).(Y - \bar{Y})]$$

$$= E[XY - X\bar{Y} - \bar{X}Y + \bar{X}\bar{Y}]$$

$$= E[XY] - \bar{X}\bar{Y}$$

نموذج الانحدار المتعدد

(Multiple Regression)

الانحدار المتعدد هو علاقة خطية بين متغير تابع ومجموعة من المتغيرات المستقلة، كما في النموذج رقم(1):

$$W_i = \beta_1 + \beta_2 \, Edu_i + \beta_3 \, Exp_i + \beta_4 \, K_i + U_i \; \ldots \; (1)$$

W_i: الأجر، Edu_i: المستوى التعليمي، Exp_i: الخبرة العملية، K_i: نوع الوظيفة.

β_i: معلمات النموذج (ثوابت).

بصفة عامة:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \ldots + \beta_k X_{ki} + U_i \; \ldots \; (2)$$

Y_i: المتغير التابع، المتغيرات (X_{2i}، X_{3i}،... X_{ki}) تعرف على أنها متغيرات مستقلة.

X_{ji} : j: يمثل رقم المتغير، i:يمثل رقم المشاهدة الخاصة بهذا المتغير.

$$\begin{cases} Y_1 = \beta_1 + \beta_2 X_{21} + \beta_3 X_{31} + \ldots + \beta_k X_{k1} + U_1 \\ Y_2 = \beta_1 + \beta_2 X_{22} + \beta_3 X_{32} + \ldots + \beta_k X_{k2} + U_2 \\ \vdots \\ Y_n = \beta_1 + \beta_2 X_{2n} + \beta_3 X_{3n} + \ldots + \beta_k X_{kn} + U_n \end{cases}$$

$$Y_{n\times1} = X_{n\times k} \, \beta_{k\times1} + U_{n\times1}$$

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 1 & X_{21} & X_{31} & \ldots & X_{k1} \\ 1 & X_{22} & X_{32} & \ldots & X_{k2} \\ \vdots & & & & \\ 1 & X_{2n} & X_{3n} & \ldots & X_{kn} \end{pmatrix}$$

1- فرضيات النموذج

أ- الفرضيات العشوائية

الإشكال الأساسي هو الحصول على تقدير للمصفوفة المجهولة β، وقبل تقدير المعلمات يجب عرض فرضيات نموذج المربعات الصغرى في شكلها المصفوفي:

1\ $E(U) = 0$ (وفق الشكل المصفوفي: $U_{n\times1}$ ، $0_{n\times1}$)

$$\textbf{2}\backslash\ E(U\,U') = E\left\{ \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 & U_2 & \dots & U_n \end{pmatrix} \right\}$$

$$= E \begin{pmatrix} U_1^2 & U_1 U_2 & \dots & U_1 U_n \\ U_2 U_1 & U_2^2 & \dots & U_2 U_n \\ \vdots & & & \\ U_n U_1 & U_n U_2 & \dots & U_n^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \sigma^2 \end{pmatrix}$$

$$= \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{E(U\,U') = \sigma^2\, I_{n\times n}}$$ (مصفوفة التباين-والتباين المشترك)

أ- تباين الخطأ العشوائي ثابت.

ب- الأخطاء العشوائية غير مرتبطة خطيا ولا مقطعيا.

3 \ حد الخطأ مستقل خطيا عن المتغيرات المستقلة. $Cov(X, U) = 0$; $(X'U = 0)$

4 \ قيم X مشاهدة بدون خطأ، بمعنى أن المصفوفة X غير عشوائية، وبالتالي فإن الانحدار غير عشوائي. حيث مصفوفة المتغيرات المستقلة ذات أرقام ثابتة ويتم ملاحظة أثرها على المتغير التابع. وذلك أساسا لغرض تسهيل الاشتقاقات الرياضية.

مثال: في تجربة زراعية يُطلب ملاحظة أثر نفس التركيز من السماد (X_{1i}) ونفس كمية الماء (X_{2i}) على كميات المحصول في أنواع مختلفة من التربة (Y_i).

Y_i	X_{1i}	X_{2i}	Y_i
كمية المحصول في نوع التربة –أ–	50	70	100
كمية المحصول في نوع التربة –ب–	50	70	120
كمية المحصول في نوع التربة –ج–	50	70	130

5/ حد الخطأ يتبع توزيعا طبيعيا $U \sim N(0, \sigma^2 I)$

ب- الفرضيات الهيكلية

/6 $\boxed{\rho (X) = k}$

k: عدد أعمدة المصفوفة X، ρ: رتبة المصفوفة X.

إذن المصفوفة X لها رتبة كاملة (full rank)، وبالتالي فهذه الفرضية تنص على أنه لا يوجد ارتباط خطي بين المتغيرات المستقلة (no Multicollinearity). مما يعني أن المصفوفة X هي مصفوفة غير فردية وبالتالي تقبل مقلوب (أو معكوس).

/7 عدد المشاهدات أكبر من عدد معلمات النموذج (وبالتالي أكبر من عدد المتغيرات المستقلة). $n > k$

8/ المصفوفة $(X'X) / n$ تؤول نحو مصفوفة محددة ومنتظمة.

2- تقدير معلمات المربعات الصغرى الاعتيادية

$$Y_{n\times1} = X_{n\times k}\, \beta_{k\times1} + U_{n\times1}$$

$$\hat{Y} = X\hat{\beta} \Rightarrow \hat{U} = Y - \hat{Y} = Y - X\hat{\beta}$$

$$SSE = \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2 = \hat{U}'\hat{U}$$

$$\text{Min} \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2 = \text{Min}\ \hat{U}'\ \hat{U} = \text{Min}\ (Y - X\hat{\beta})'\ (Y - X\hat{\beta})$$

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2 = (Y' - \hat{\beta}'\ X')\ (Y - X\hat{\beta})$$

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2 = Y'\ Y - \hat{\beta}'\ X'\ Y - Y'\ X\ \hat{\beta} + \hat{\beta}'\ X'\ X\ \hat{\beta}$$

$$(\text{scaller})' = (\text{scaller}) \Rightarrow Y'_{1\times n}\ X_{n\times k}\ \hat{\beta}_{k\times 1} = \hat{\beta}'_{1\times k}\ X'_{k\times n}\ Y_{n\times 1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2 = Y'\ Y - 2\ \hat{\beta}'\ X'\ Y + \hat{\beta}'\ X'\ X\ \hat{\beta}$$

$$\frac{d\ \Sigma \hat{u}_i^2}{d\ \hat{\beta}} = 0 - 2\ X'\ Y + 2\ X'\ X\ \hat{\beta} = 0$$

ننقل الحد الأول إلى الطرف الثاني ثم نضرب الطرفين في (0.5)

$$(0.5)\ 2\ X'\ X\ \hat{\beta} = (0.5)\ 2\ X'\ Y \Rightarrow X'\ X\ \hat{\beta} = X'\ Y$$

$$(X'\ X)^{-1}\ X'\ X\ \hat{\beta} = (X'\ X)^{-1}\ X'\ Y$$

$$I\ \hat{\beta} = (X'\ X)^{-1}\ X'\ Y$$

$$\boxed{\hat{\beta} = (X'\ X)^{-1}\ X'\ Y}$$

* المصفوفة $(X'\ X)$ تسمى بـ"مصفوفة الناتج المتقاطع" ومن المضمون وجود مقلوب (أو معكوس) لها بسبب الفرضية السادسة التي تنص على أن المصفوفة X لها رتبة كاملة (k).

3- تميز مقدرات المربعات الصغرى الاعتيادية

$$\hat{\beta} = (X'\ X)^{-1}\ X'\ Y \quad \text{but } Y = X\ \beta + U$$

$$\hat{\beta} = (X'\ X)^{-1}\ X'\ (X\ \beta + U)$$

$$\hat{\beta} = (X'\ X)^{-1}\ (X'\ X)\ \beta + (X'\ X)^{-1}\ X'\ U$$

$$\hat{\beta} = I\ \beta + (X'\ X)^{-1}\ X'\ U$$

$$\hat{\beta} = \beta + (X'\ X)^{-1}\ X'\ U \qquad \dots (1)$$

$E\ (\hat{\beta}) = E\ (\beta + (X'\ X)^{-1}\ X'\ U)$ … (X مصفوفة ثابتة من الفرضية 4)

$E\ (\hat{\beta}) = E\ (\beta) + (X'\ X)^{-1}\ X'\ E\ (U)$ …. $(E\ (U) = 0)$

$$E(\hat{\beta}) = E(\beta)$$
$$E(\hat{\beta}) = \beta$$

وبالتالي فإن مقدّرات طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية $\hat{\beta}$ هي مقدرات خطية غير متحيزة لـ β.

- بواقي (أخطاء) المربعات الصغرى الاعتيادية

$$\hat{U} = Y - \hat{Y} = Y - X\hat{\beta}$$

$$\hat{U} = Y - X(X'X)^{-1}X'Y$$

$$\hat{U} = [I - X(X'X)^{-1}X']Y$$

$$M = I - X(X'X)^{-1}X' \Rightarrow \hat{U} = MY \ \ldots(*)$$

بحيث يمكن البرهان على أن المصفوفة M عقيمة (أو حيادية القوة) (Idempotent Matrix).

$$* \qquad X'\hat{U} = X'[I - X(X'X)^{-1}X']Y$$

$$X'\hat{U} = [X' - X'X(X'X)^{-1}X']Y$$

$$X'\hat{U} = [X' - IX']Y$$

$$X'\hat{U} = [X' - X']Y$$

$$X'\hat{U} = 0 \quad \ldots (X' - X' = 0)$$

بالتالي فأعمدة المصفوفتين X و U مستقلة إحصائيا، وهو ما يعني أن الأخطاء ليس لديها ارتباط خطي مع المتغير X.

ملاحظة:

هذه المشكلة (أي الارتباط بين X و U) تسمى المشكلة المتزامنة (Simultaneity Problem) وإن وجدت لا يمكن استخدام طريقة المربعات الصغرى (OLS). وحينها

يتم اللجوء إلى نماذج أخرى من أشهرها نموذج المتغيرات المساعدة (Instrumental Variable :IV method).

4- مصفوفة التباين-التباين المشترك لمقدرات المربعات الصغرى

$\hat{\beta} = \beta + (X' X)^{-1} X' U$ ... ((1) عد إلى المعادلة)

$\hat{\beta} - \beta = (X' X)^{-1} X' U$ ... (2)

نضرب طرفي المعادلة (2) في $(\hat{\beta} - \beta)'$ من الجهة اليمنى:

$$(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)' = (X' X)^{-1} X' U (\hat{\beta} - \beta)'$$

$$(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)' = (X' X)^{-1} X' U [(X' X)^{-1} X' U]'$$

$$(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)' = (X' X)^{-1} X' U U' (X')' [(X' X)^{-1}]'$$

$$(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)' = (X' X)^{-1} X' U U' X [(X' X)^{-1}]'$$

$$(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)' = (X' X)^{-1} X' U U' X [(X' X)']^{-1} \ldots ([A^{-1}]' = [A']^{-1})$$

$$(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)' = (X' X)^{-1} X' U U' X [(X)'(X')']^{-1} ([A\,B]' = B'\,A')$$

$$(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)' = (X' X)^{-1} X' U U' X (X' X)^{-1} \ldots(3)$$

$$E[(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)'] = E[(X' X)^{-1} X' U U' X (X' X)^{-1}]$$

$$E[(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)'] = (X' X)^{-1} X' E[U U'] X (X' X)^{-1}$$

$$E[(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)'] = (X' X)^{-1} X' \sigma^2 I_n X (X' X)^{-1}$$

$$E[(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)'] = \sigma^2 (X' X)^{-1} (X' X) (X' X)^{-1}$$

$$E[(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)'] = \sigma^2 I_n (X' X)^{-1}$$

$$\boxed{E[(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)'] = \sigma^2 (X' X)^{-1}}$$

و هي مصفوفة التباين و التباين المشترك للمعلمات المقدرة.

$$\boxed{Var\text{-}Cov(\hat{\beta}) = \sigma^2 (X' X)^{-1}}$$

ملاحظة:

$$E[(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)'] = E\left(\begin{pmatrix} (\hat{\beta}_1 - \beta_1) \\ (\hat{\beta}_2 - \beta_2) \\ \vdots \\ (\hat{\beta}_k - \beta_k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\hat{\beta}_1 - \beta_1) & (\hat{\beta}_2 - \beta_2) \dots & (\hat{\beta}_k - \beta_k) \end{pmatrix}\right)$$

$$E[(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)'] = E\begin{pmatrix} (\hat{\beta}_1 - \beta_1)^2 & (\hat{\beta}_1 - \beta_1)(\hat{\beta}_2 - \beta_2) & \dots & (\hat{\beta}_1 - \beta_1)(\hat{\beta}_k - \beta_k) \\ (\hat{\beta}_2 - \beta_2)(\hat{\beta}_1 - \beta_1) & (\hat{\beta}_2 - \beta_2)^2 & & (\hat{\beta}_2 - \beta_2)(\hat{\beta}_k - \beta_k) \\ \vdots & & & \\ (\hat{\beta}_k - \beta_k)(\hat{\beta}_1 - \beta_1) & (\hat{\beta}_k - \beta_k)(\hat{\beta}_2 - \beta_2) & & (\hat{\beta}_k - \beta_k)^2 \end{pmatrix}$$

قيم التباين للمعلمات المقدرة تتمثل في عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة، أما القيم الباقية فتمثل قيم التباين المشترك بين المعلمات المقدرة.

5- تقدير σ^2:

نريد أن نجد مقدرة ل (σ^2): والذي يمثل تباين حد الخطأ. وبما أن قيم حد الخطأ لا يمكن ملاحظتها بطريقة مباشرة، فإنه يبدو من المنطقي تقدير σ^2 على مجموع مربعات الأخطاء المقدرة $(\hat{U}'\hat{U})$.

$$\hat{U} = Y - \hat{Y} = Y - X\hat{\beta}$$

$$\hat{U} = M\,Y, \quad M = I - X(X'X)^{-1}X'$$

$$\hat{U} = M(X\beta + U)$$

$$\hat{U} = MX\beta + MU$$

$$\hat{U} = MU \dots (MX = 0)$$

$$\hat{U}'\hat{U} = (MU)'(MU)$$

$$\hat{U}'\hat{U} = U'M'MU \dots (4)$$

$$M'M = [I - X(X'X)^{-1}X']'[I - X(X'X)^{-1}X']$$

$$M'M = [I - (X')'[(X'X)^{-1}]'(X)'][I - X(X'X)^{-1}X']$$

$$M'M = [I - X(X'X)^{-1}X'][I - X(X'X)^{-1}X'] \dots ([(X'X)^{-1}]' = (X'X)^{-1}) \ (5)$$

$$M' M = I - X (X' X)^{-1} X' - X (X' X)^{-1} X' + X (X' X)^{-1} X'$$

$$M' M = I - X (X' X)^{-1} X'$$

$M' M = M$ ...($M^2 = M$:أو $M' M = M^2$، لأن M متناظرة و)

$\hat{U}' \hat{U} = U' M' M U$ ...((4) من المعادلة)

$$\hat{U}' \hat{U} = U' M U$$

$$E(\hat{U}' \hat{U}) = E(U'_{1,n} M_{n,n} U_{n,n})$$

$$E(\hat{U}' \hat{U}) = E[tr(U'_{1,n} M_{n,n} U_{n,1})] \ldots (A = tr(A))$$

$$E(\hat{U}' \hat{U}) = E[tr(U_{n,1} U'_{1,n} M_{n,n})] \ldots (tr(AB) = tr(BA))$$

$$E(\hat{U}' \hat{U}) = E[tr(M_{n,n} U_{n,1} U'_{1,n})] \ldots (tr(AB) = tr(BA))$$

$$E(\hat{U}' \hat{U}) = tr[E(M U U')] \ldots (E(tr(A)) = tr(E(A)))$$

$$E(\hat{U}' \hat{U}) = tr[M E(U U')]$$

$$E(\hat{U}' \hat{U}) = tr[M \sigma^2 I_n]$$

$$E(\hat{U}' \hat{U}) = \sigma^2 tr(M) \ldots (6)$$

$$tr(M) = tr(I - X_{n.k} (X' X)^{-1} X'_{k.n})$$

$$tr(M) = tr(I) - tr(X (X' X)^{-1} X')$$

$$tr(M) = n - tr(X'X (X' X)^{-1})$$

$$tr(M) = n - tr(I_{k.k})$$

$$tr(M) = n - k$$

$E(\hat{U}' \hat{U}) = \sigma^2 (n - k)$ ...(6 بالتعويض في)

$$\sigma^2 = \frac{E(\hat{U}' \hat{U})}{(n - k)}$$

$$\sigma^2 = \frac{(\hat{U}' \hat{U})}{(n - k)}$$

وبالتالي يمكن تقدير σ^2 تقريبيا بالصيغة التالية:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(\hat{U}' \hat{U})}{(n - k)}$$

- نظرية جوس ماركوف (Gauss- Markov):

المعلمة $\hat{\beta}$ أفضل مقدر خطي غير متحيز (BLUE: Best Linear Unbiased Estimator) إذا كان تباينها أدنى ما يمكن من بين كل المقدرات غير المتحيزة (أو يمكن القول أن $\hat{\beta}$ تحتوي مقدرات فعالة (efficient estimators)).

جوس ماركوف انطلاقا من فرضيات نموذج المربعات الصغرى يبين أن مقدرات المربعات الصغرى تمتلك أدنى تباين ضمن مجموعة المقدرات الخطية غير المتحيزة الأخرى.

نريد أن نبرهن أنّ $\hat{\beta}$ ضمن مجموعة المقدرات الخطية غير المتحيزة الأخرى تمتلك أدنى تباين:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y, \quad \text{var}(\hat{\beta}) = \sigma^2 (X'X)^{-1}$$

سنأخذ أي مقدرة خطية غير متحيزة أخرى ونبرهن على أن تباينها أكبر من تباين $\hat{\beta}$:

$$\hat{\hat{\beta}} = [(X'X)^{-1}X' + C]\,Y \ldots (C_{kn}(+,-)) \Rightarrow \text{show that: var}(\hat{\hat{\beta}}) > \text{var}(\hat{\beta})$$

$$\hat{\hat{\beta}} = [(X'X)^{-1}X' + C]\,(X\beta + U)$$

$$\hat{\hat{\beta}} = (X'X)^{-1}X'X\beta + CX\beta + (X'X)^{-1}X'U + CU$$

$$E(\hat{\hat{\beta}}) = I_{kk}\,\beta + CX\beta + (X'X)^{-1}X'E(U) + C\,E(U)$$

$$E(\hat{\hat{\beta}}) = \beta + CX\beta + (X'X)^{-1}X'E(U) + C\,E(U)$$

$$E(\hat{\hat{\beta}}) = I_{kk}\,\beta_{kn} + C_{kn}X_{nk}\beta_{kn}$$

$$E(\hat{\hat{\beta}}) = (I_{kk} + C_{kn}X_{nk})\,\beta_{kn} = \beta_{kn} \ \ldots(\text{must equal to } \beta)$$

$$\Rightarrow C_{kn}X_{nk} = 0 \ldots (1)$$

$$\Rightarrow \mathbf{(CX)' = (X'C') = 0}$$

نحتاج لإيجاد تباين $(\hat{\hat{\beta}})$

$$\text{var}(\hat{\hat{\beta}}) = E[(\hat{\hat{\beta}} - \beta)(\hat{\hat{\beta}} - \beta)'] \quad \ldots (2)$$

$$\hat{\hat{\beta}} - \beta = [(X'X)^{-1}X' + C]\,(X\beta + U) - \beta$$

$$\hat{\hat{\beta}} - \beta = (X'X)^{-1}X'X\beta + \mathbf{CX}\beta + (X'X)^{-1}X'U + CU - \beta \ \ldots (\mathbf{CX}=0)$$

$$\hat{\hat{\beta}} - \beta = I_{kk}\cancel{\beta} + (X'X)^{-1}X'U + CU - \cancel{\beta}$$

$$\hat{\hat{\beta}} - \beta = (X'X)^{-1}X'U + CU \ \ldots (3)$$

$$(\hat{\hat{\beta}} - \beta)' = [(X'X)^{-1}X'U + CU]'$$

$$(\hat{\hat{\beta}} - \beta)' = U'X(X'X)^{-1} + U'C' \ \ldots (4)$$

نعوض المعادلتين (3) و (4) في المعادلة (2)

$$var(\hat{\hat{\beta}}) = E[((X'X)^{-1}X'U + CU)(U'X(X'X)^{-1} + U'C')]$$

$$var(\hat{\hat{\beta}}) = E[(X'X)^{-1}X'UU'X(X'X)^{-1} + CUU'X(X'X)^{-1} + (X'X)^{-1}X'UU'C' + CUU'C']$$

$$var(\hat{\hat{\beta}}) = (X'X)^{-1}X'E[UU']X(X'X)^{-1} + CE[UU']X(X'X)^{-1} + (X'X)^{-1}X'E[UU']C' + CE[UU']C'$$

$$var(\hat{\hat{\beta}}) = \sigma^2[(X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1} + \color{red}{CX}(X'X)^{-1} + (X'X)^{-1}\color{red}{X'C'} + CC']$$

$$\ldots(E[UU'] = \sigma^2 I), (CX = 0 \Rightarrow (CX)' = 0)$$

$$var(\hat{\hat{\beta}}) = \sigma^2[(X'X)^{-1} + CC']$$

$$= \sigma^2(X'X)^{-1} + \sigma^2 CC'$$

$$\boxed{var(\hat{\hat{\beta}}) = var(\hat{\beta}) + \sigma^2 CC'}$$

(عناصر القطر الرئيسي) $\sigma^2 CC' > 0 \Rightarrow var(\hat{\hat{\beta}}) > var(\hat{\beta})$

$$\Rightarrow \hat{\beta} \text{ is BLUE}$$

إذن المعلمة $\hat{\beta}$ أفضل مقدر خطي غير متحيز.

7- جدول تحليل التباين (ANOVA: Analysis of Variance):

$$\hat{U} = Y - \hat{Y} = Y - X\hat{\beta}$$

$$\hat{U}'\hat{U} = (Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta})$$

$$\hat{U}'\hat{U} = (Y' - \hat{\beta}'X')(Y - X\hat{\beta})$$

$$\hat{U}'\hat{U} = Y'Y - Y'_{1n}X_{nk}\hat{\beta}_{k1} - \hat{\beta}'_{1k}X'_{kn}Y_{n1} + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}$$

$$\hat{U}'\hat{U} = Y'Y - (\hat{\beta}'_{1k}X'_{kn}Y_{n1})' - (\hat{\beta}'_{1k}X'_{kn}Y_{n1}) + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta} \ldots[(scl)' = (scl)]$$

$$\hat{U}'\hat{U} = Y'Y - 2\hat{\beta}'_{1k}X'_{kn}Y_{n1} + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}$$

$$\boxed{X'X\hat{\beta} = X'X(X'X)^{-1}X'Y = X'Y} \ldots (5)$$

$$\hat{U}'\hat{U} = Y'Y - 2\hat{\beta}'_{1k}X'_{kn}Y_{n1} + \hat{\beta}'X'Y$$

$$\boxed{\hat{U}'\hat{U} = Y'Y - \hat{\beta}'X'Y}$$

$Y'Y = \hat{\beta}'X'Y + \hat{U}'\hat{U}$ ...(كلها مصفوفات رقمية لذا يمكن القسمة عليها)

$$1 = \frac{\hat{\beta}'X'Y}{Y'Y} + \frac{\hat{U}'\hat{U}}{Y'Y}$$

$$1 = \frac{SSR}{SST} + \frac{SSE}{SST}$$

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST} = \frac{SST - SSE}{SST} = \frac{\hat{\beta}'X'Y}{Y'Y}$$

$(5) \Rightarrow R^2 = \frac{\hat{\beta}'X'Y}{Y'Y} = \frac{\hat{\beta}'X'X\hat{\beta}}{Y'Y} = 1 - \frac{\hat{U}'\hat{U}}{Y'Y} \sim$ إذا كان $\bar{y} = 0$

$$\bar{y} \neq 0: \quad R^2 = \frac{\hat{\beta}'X'Y - n\bar{y}^2}{Y'Y - n\bar{y}^2} = \frac{\hat{\beta}'X'X\hat{\beta} - n\bar{y}^2}{Y'Y - n\bar{y}^2}$$

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-k}(1-R^2)$$

$$\bar{R}^2 = \frac{1-k}{n-k} + \frac{n-1}{n-k}R^2$$

جدول تحليل التباين (ANOVA):

مصدر التباين	مجموع المربعات	درجة الحرية	التباين	مؤشر F
المفسر من طرف الانحدار	$SSR=\hat{\beta}'X'Y-n\bar{y}^2$	$k-1$	$SSR/(k-1)$	$\frac{SSR/(k-1)}{SSE/(n-k)}$
غير المفسر	$SSE=Y'Y-\hat{\beta}'X'Y$	$n-k$	$SSE/(n-k)$	
المجموع	$SST=Y'Y-n\bar{y}^2$	$n-1$		

7- اختبار الفرضيات (Hypothesis Testing):

أ- اختبار الفرضيات لمعلمات الانحدار فرديا (اختبار t)

يستخدم اختبار (t) لاختبار المعنوية الإحصائية لكل معلمة من معلمات النموذج على حدة، وذلك بغرض معرفة ما إذا كان المتغير المستقل مفسرا إحصائيا للمتغير التابع. تصاغ الفرضية العدمية (H_0) والفرضية البديلة (H_1) كما يلي:

$$\begin{cases} H_0: \beta_i = 0 \\ H_1: \beta_i \neq 0 \end{cases}$$

$$\hat{\beta} \sim N[\beta, \sigma^2(X'X)^{-1}]$$

ويمكن تقدير σ^2 تقريبيا كما وضحنا سابقا بالصيغة التالية:

$$\hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{(\hat{U}'\hat{U})}{(n-k)}$$

(القيمة المحسوبة)
$$t_{cal} = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\hat{\sigma}_{\beta_i}} = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\hat{S}_{\beta_i}} = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{S\sqrt{x_{ii}}} \quad \ldots$$

x_{ii} هو العنصر رقم (i) من عناصر قطر المصفوفة $(X'X)^{-1}$ التي تستخدم في حساب صيغة التباين:

$$var(\hat{\beta}) = \sigma^2(X'X)^{-1} = S^2(X'X)^{-1}$$

القيمة الحرجة أو (الجدولية)
$$t_{cri} = t_{tab} = t_{(n-k,\alpha/2)} \quad \ldots$$

مجال الثقة للمعلمة $\hat{\beta}$ عند مستوى **ثقة** $(1-\alpha)$ يعطى كالتالي:

$\hat{\beta}_i \pm t_{(n-k,\alpha/2)} S_{\hat{\beta}_i} = \beta_i \pm t_{(n-k,\alpha/2)} S \sqrt{x_{ii}} \ldots (S_{\hat{\beta}_i} = \sqrt{var(\hat{\beta}_i)})$

[في الانحدار البسيط: $\hat{\beta}_i \pm t_{(n-2,\alpha/2)} S_{\hat{\beta}_i}$، لأن (k=2)]

$t_{cal} > t_{tab} \Rightarrow$ رفض الفرضية H_0 عند درجة معنوية α

$t_{cal} < t_{tab} \Rightarrow$ عدم رفض الفرضية H_0 عند درجة معنوية α

ب- اختبار التفسير الإحصائي العام للنموذج (اختبار F)

يستخدم اختبار (F) لاختبار المعنوية الإحصائية للانحدار (أو للنموذج) بصفة عامة، وذلك بغرض معرفة ما إذا كان النموذج قابل للتنبؤ بقيم المتغير التابع. تصاغ الفرضية العدمية (H_0) والفرضية البديلة (H_1) كما يلي:

$H_0: \forall\ \alpha_j,\ \alpha_j = 0,\ j=1, \ldots, k.$

$H_1: \exists\ \alpha_j,\ \alpha_j \neq 0,\ j=1, \ldots, k.$

انطلاقا من جدول (ANOVA) القيمة المحسوبة لإحصاءة (F) تعطى كالآتي:

$$F = \frac{SSR/(k-1)}{SSE/(n-k)} = \frac{R^2/(k-1)}{(1-R^2)/(n-k)}$$

أما القيمة الحرجة فهي: $F_{tab} = F_{\alpha(k-1,n-k)}$

[في الانحدار البسيط: $F_{\alpha(1,n-2)}$، لأن (k=2)]

$F_{cal} > F_{tab} \Rightarrow$ رفض الفرضية H_0 عند درجة معنوية α

$F_{cal} < F_{tab} \Rightarrow$ عدم رفض الفرضية H_0 عند درجة معنوية α