تمهيد:

تطرقنا في الدرس السابق الى الأمثلية غير الخطية لمتغير واحد، نوسع التحليل ونتناول عدة متغيرات. فهناك دوال اقتصادية تحتوي أكثر من متغير مستقل تسمى بدوال ذات متغيرات متعددة كما في دالة الطلب، حيث أنه يتأثر بمجموعة من المتغيرات كما يلي:($Q_d = f(px, py, pz, R, G, N,...)$ أو أن عملية انتاج منتوج يتطلب العديد من عناصر الانتاج مثل العمل، رأس المال..الخ. يمكن تقسيم مشاكل الأمثلية غير الخطية متعددة المتغيرات الى:

- مشاكل غير مقيدة Unconstrained Problems.
- مشاكل مقيدة Constrained Problems.

سنتناول من خلال هذا المحور المشاكل غير المقيدة متعددة المتغيرات، نورد منها الطريقة التقليدية وبعض الطرق التكرارية مثل طريقة نيوتن- رافسون وطريقة اقصى ميل صعود/ نزول.

أولا : المشاكل غير المقيدة: وهنا تكون المشكلة على النحو التالي:

أوجد X_j ، بحيث $j = 1,2,3,..n$ التي تجعل:

$$\text{Max (or Min)} \ \ z = f(x_1, x_2, \dots x_n)$$

ولا توجد أي قيود على الدالة. وفيها يتعين علينا ايجاد قيم مناسبة لمتغيرات القرار: $x = (x_1, x_2, x_3..x_n)$

01- الأمثلية غير الخطية بدون قيود حالة متغيرين

سنعالج في هذا الجزء البرامج غير الخطية التي تحتوي **على متغيرين** وفي الجزء اللاحق سنعالج البرامج غير الخطية التي تحتوي **على اكثر من متغيرين**. وهذا بالطرق التقليدية.

لنفرض الدالة التالية: $Y = f(x_1, x_2)$

حتى تكون الدالة في نهايتها العظمى(الدنيا) ينبغي توفر شرطين:

- **الشرط الضروري Necessary condition**: لإيجاد النقاط الحرجة

$$\frac{dY}{dx_1} = 0, \frac{dY}{dx_2} = 0$$

- **الشرط الكافي Sufficient condition**:لتوضيح اذا كانت الدالة في نهايتها العظمى او الدنيا.
- **اذا كان:** $\frac{\partial^2 Y}{\partial x_1^2} \prec 0, \frac{\partial^2 Y}{\partial x_2^2} \prec 0$ ← الدالة عند نهايتها العظمى.
- **اذا كان:** $\frac{\partial^2 Y}{\partial x_1^2} \succ 0, \frac{\partial^2 Y}{\partial x_2^2} \succ 0$ ← الدالة عند نهايتها دنيا.

هناك شرط ثالث في حالة معرفة كون الدالة في حالتها المثلى عند النظر اليها من جميع الاتجاهات فينبغي ان يتحقق الشرط التالي:

$$\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x_1^2}\right).\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x_2^2}\right) \succ \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2$$

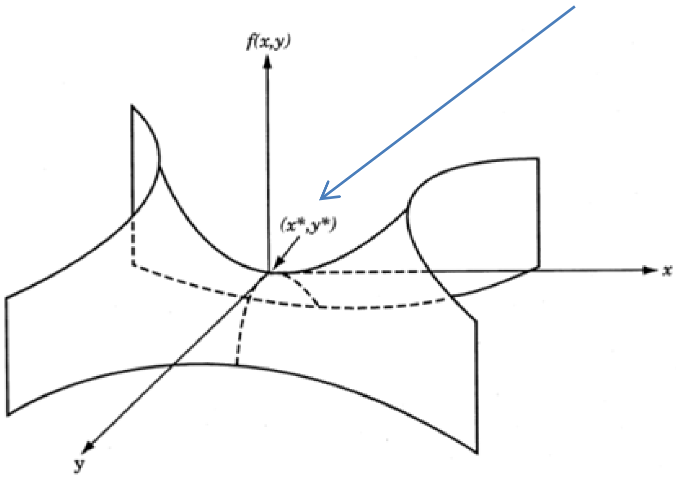
لان عدم توفر هذا الشرط يضعنا أمام الحالتين التاليتين:

- اذا كان: $\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x_1^2}\right).\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x_2^2}\right) \prec \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2$ وكانت $\frac{\partial^2 Y}{\partial x_2^2}$ و $\frac{\partial^2 Y}{\partial x_1^2}$ لهما نفس الاشارة:

← نقطة انعطاف Inflection point.

- اذا كان: $\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x_1^2}\right).\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x_2^2}\right) \prec \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2$ وكانت $\frac{\partial^2 Y}{\partial x_2^2}$ و $\frac{\partial^2 Y}{\partial x_1^2}$ لهما اشارتين مختلفتين:

← نقطة سرج saddle point.



- اذا كان: $\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x_1^2}\right).\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x_2^2}\right) = \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2$ فان الفحص غير قطعي.

نلخص ما سبق في الجدول التالي:

الشرط	Min	Max	نقطة سرج	نقطة انعطاف
الضروري	$\frac{dY}{dx_1}=0,\frac{dY}{dx_2}=0$	$\frac{dY}{dx_1}=0,\frac{dY}{dx_2}=0$	$\frac{dY}{dx_1}=0,\frac{dY}{dx_2}=0$	$\frac{dY}{dx_1}=0,\frac{dY}{dx_2}=0$
الكافي	$\frac{\partial^2Y}{\partial x_1^2}\succ 0,\frac{\partial^2Y}{\partial x_2^2}\succ 0$	$\frac{\partial^2Y}{\partial x_1^2}\prec 0,\frac{\partial^2Y}{\partial x_2^2}\prec 0$	$\frac{\partial^2Y}{\partial x_1^2}\prec 0,\frac{\partial^2Y}{\partial x_2^2}\succ 0$ أو $\frac{\partial^2Y}{\partial x_1^2}\succ 0,\frac{\partial^2Y}{\partial x_2^2}\prec 0$	$\frac{\partial^2Y}{\partial x_1^2}\succ 0,\frac{\partial^2Y}{\partial x_2^2}\succ 0$ او $\frac{\partial^2Y}{\partial x_1^2}\prec 0,\frac{\partial^2Y}{\partial x_2^2}\prec 0$
الثالث	$\left(\frac{\partial^2Y}{\partial x_1^2}\right).\left(\frac{\partial^2Y}{\partial x_2^2}\right)\succ\left(\frac{\partial^2Y}{\partial x_1\partial x_2}\right)^2$	$\left(\frac{\partial^2Y}{\partial x_1^2}\right).\left(\frac{\partial^2Y}{\partial x_2^2}\right)\succ\left(\frac{\partial^2Y}{\partial x_1\partial x_2}\right)^2$	$\left(\frac{\partial^2Y}{\partial x_1^2}\right).\left(\frac{\partial^2Y}{\partial x_2^2}\right)\succ\left(\frac{\partial^2Y}{\partial x_1\partial x_2}\right)^2$	$\left(\frac{\partial^2Y}{\partial x_1^2}\right).\left(\frac{\partial^2Y}{\partial x_2^2}\right)\prec\left(\frac{\partial^2Y}{\partial x_1\partial x_2}\right)^2$

مثال01:

$$f(x)=2x_1^2+4x_1x_2+4x_2^2-4x_1+2x_2+16$$

<u>الحل:</u>

- **الشرط الضروري:**

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}=4x_1+4x_2-4=0\ \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}=4x_1+8x_2+2=0\ \dots\dots..(2)$$

بحل جملة معادلة نتحصل على: $x_1=2.5\quad\&\quad x_2=-1.5$

الشرط الكافي:

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2}=4>0 \qquad \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1\partial x_2}\right)^2=(4)^2=16$$

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2}=8>0 \qquad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right).\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right)\succ\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}\right)^2\Rightarrow(4).(8)\succ(4)^2$$

وهذا يعني وجود نقطة صغرى للدالة عند $x_1=x_1^*=2.5\quad\&\quad x_2=x_2^*=-1.5$

02– الأمثلية غير الخطية بدون قيود متعددة المتغيرات.

قبل البدء في البحث عن أمثلية الدالة متعددة المتغيرات، سنتطرق الى بعض المفاهيم العامة ذات صلة:

2–1– مفاهـــيم عامة:

أ) التدرج أو المتجه المتدرج Gradient Vector :

لتكن الدالة $f:\Re^n \to \Re$ لها مشتقات جزئية ثانية موجودة ومستمرة على $\Re^n$. ونضع $x=(x_1, x_2, x_3..x_n)$ نضع $\nabla f(x)$ ونسميه متجه المتدرج للدالة f في النقطة x وهي عبارة عن شعاع يتكون من أجزاء هذه الأجزاء عبارة عن اشتقاقات جزئية بداية من $x_1, x_2, x_3..x_n$ كما يلي:

$$\nabla f(x)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\end{pmatrix}^T$$

مثال02: أعطي التدرج للدوال التالية:

1) $f(x)=-x_1^2-2x_2^2$

$$\nabla f(x)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2x_1\\ -4x_2\end{pmatrix}$$

2) $f(x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2$

$$\nabla f(x)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\\ \dfrac{\partial f}{\partial x_3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_1\\ 2x_2\\ 2x_3\end{pmatrix}$$

ب) مصفوفة جاكوبي Jacobian Matrix : اذا كان لدينا Gradient معناه لدينا Jacobian والعكس لان مصفوفة جاكوبي هي عبارة عن منقول متجة المتدرج.

$$Jf=\nabla f(x)^T=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\end{pmatrix}$$

مثال03: أحسب مصفوفة جاكوبي لنفس المثال السابق:

1) $f(x)=-x_1^2-2x_2^2$

$$Jf=\nabla f(x)^T=\begin{pmatrix}-2x_1 & -4x_2\end{pmatrix}$$

2) $f(x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2$

$$Jf = \nabla f(x)^T = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \end{pmatrix}$$

ج) **المصفوفة الهيسية Hessian matrix** : تتكون من المشتقات الجزئية الثانية لكل متغير بالنسبة لنفس المتغير وتقع على القطر الرئيسي والمشتقات الجزئية الثانية المتقاطعة تقع خارج القطر الرئيسي:

$$H(\mathbf{X}) = \nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial {x_n}^2} \end{bmatrix}$$

مثال04: أحسب المصفوفة الهيسية $H(X)$ للدوال التالية:

1) $f(x) = -x_1^2 - 2x_2^2$

$$H(x) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

2) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

$$H(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

إيجاد القيم نقطة استقرارية بالطرق التقليدية:

لإيجاد القيم الحرجة أو نقطة استقرارية الدالة نستخدم أسلوبًا مشابهًا للبحث عن الحد الأقصى أو الحد الأدنى في دوال ذات متغير واحد لكن هذا المرة سنستخدم المشتقات الجزئية من الدوال متعددة المتغيرات.

حتى تكون الدالة عند نهايتها العظمى أو الدنيا ينبغي توفر الشرطين التاليين:

- **شرط ضروري**: المشتقات الجزئية الأولى تساوي الصفر، أي:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

أو $\nabla f(x) = 0$

- **الشرط الكافي**: ان تطبيق هذا الشرط في حالة الدوال متعددة المتغيرات(بما فيها الدوال التي تتكون من متغيرين)، **يتطلب** استخدام المحدد الهسي لمعرفة ما اذا كانت القيم الحرجة عند نهايتها العظمى أو الدنيا.

وبحساب المحدد الهيسي نكون أمام حالتين:

- **موجب أو أكيد الايجابية** تكون النقطة الحرجة عبارة عن نقاط تحقق نهاية دنيا للدالة. ويكون المحدد الهيسي أكيد الايجابية عندما تكون جميع محيدداته الرئيسية القطرية موجبة.

- **سالب أو أكيد السلبية** تكون النقاط الحرجة عبارة عن نقاط تحقق نهاية عظمى للدالة. ويكون المحدد الهيسي أكيد السلبية عندما تتبادل جميع محيدداته الرئيسية القطرية الاشارة فيما بينها بين السلبية والايجابية

يمكن تلخيص كل ما سبق في الجدول التالي:

نهاية الدالة / الشرط	Min	Max
الضروري	$\nabla f(x)=0$	$\nabla f(x)=0$
الكافي	$\|H_1\|;\|H_2\|;\|H_3\|...\|H_n\| \succ 0$	$\|H_1\| \prec 0;\|H_2\| \succ 0;\|H_3\| \prec 0;.....$

مثال05: أوجد نقطة استقرارية مع تحديد طبيعتها:

$$f(x) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 - 4x_1 + 2x_2 + 16$$

الحل:

- **الشرط الضروري:**

$$\nabla f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x_1 + 4x_2 - 4 \\ 4x_1 + 8x_2 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solving above equations $x_1 = x_1^* = 2.5 \quad \& \quad x_2 = x_2^* = -1.5$

- **الشرط الكافي:**

$$H = \nabla^2 f(x) = \left.\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}\right|_{\substack{x_1 = x_1^* = 2.5 \\ x_2 = x_2^* = -1.5}} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن المحدد الهيسي أكيد الايجابية (H>0) لأن:

$$|H_1| = 4 \succ 0$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 32 - 16 = 16 \succ 0$$

وبالتالي فإن الدالة f(x) لديها قيمة دنيا عند :

$$x_1 = x_1^* = 2.5 \quad \& \quad x_2 = x_2^* = -1.5$$

العلاقة بين شروط الدرجة الثانية والدوال المحدبة والمقعرة:

ليكن: $f:\Re^n \longrightarrow \Re$ لها مشتقات جزئية ثانية موجودة ومستمرة **على** $\Re^n$

بحيث:

$$\nabla f(x)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1}\\ \vdots \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_n}\end{pmatrix};x\in\Re^n \quad ، \quad H(x)=\nabla^2 f(x)=\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n}\\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn}\end{pmatrix}$$

$$f_{ij}=\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j};\forall i,j=1;\ldots.n$$

نرمز لـ H_J **مصفوفة هس في حالة حذف** $n-j$ **عمود** $n-j$ **سطر**

$$|H_1|=f_{11}$$

$$|H_2|=\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12}\\ f_{21} & f_{22}\end{vmatrix};\ldots\ldots\ldots|H_n|=\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n}\\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn}\end{vmatrix}$$

وتسمى هذه المحددات الجزئية الرئيسية بـ mineurs principaux. وعليه نسمي هذه الطريقة بطريقة التصغير الأساسية.

نظرية :

إذا كان : $|H_J|>0;\forall J=1;\ldots\ldots.n$

H نقول عنها مؤكدة الايجاب définie positive $\Leftarrow$ f محدبة convexe

إذا كان : $(-1)^J|H_J|>0;\forall J=1;\ldots\ldots.n$

H نقول عنها مؤكدة السلبية définie négative $\Leftarrow$ f مقعر concave

مثال06: اذا كان الايراد الكلي والتكلفة الكلية معطاة بالعلاقة التالية:

$RT = 12q_1 + 18q_2$
$CT = 2q_1^2 + q_1q_2 + 2q_2^2$

أوجد q_1 و q_2 التي تعظم الربح؟

Profit = revenue – cost

$$\Pi = 12q_1 + 18q_2 - \left(2q_1^2 + q_1q_2 + 2q_2^2\right)$$

- **الشرط الضروري:**

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \pi}{\partial q_1} \\ \dfrac{\partial \pi}{\partial q_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 - 4q_1 - q_2 \\ 18 - q_1 - 4q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

بحل جملة معادلة نجد : $q_1 = 2$ and $q_2 = 4$

هل تعطي هذا الكميات أقصى maximum قيمة للربح؟

- **الشرط الكافي:**

$$H = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 \pi}{\partial q_1^2} & \dfrac{\partial^2 \pi}{\partial q_1 \partial q_2} \\ \dfrac{\partial^2 \pi}{\partial q_2 \partial q_1} & \dfrac{\partial^2 \pi}{\partial q_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$$

والمحددات الجزئية أو الفرعية لهذه المحددة هي:

$$|H_1| = -4 \prec 0$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 16 - 1 = 15 \succ 0$$

وبالتالي فإن H هو أكيد السلبية وهذا يعني أن الدالة مقعرة أي أن القيم $q_1 = 2$ و$q_2 = 4$ تعظم الربح.

So H is negative definite, then f is (strictly) concave and the values for q_1 and q_2 maximise profits

مثال07: هل الدالة f محدبة أم مقعرة؟

$$f(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + 4z^2 + 3yz$$

$$H(x, y, z) = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$|H_1| = 6 > 0$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 12 > 0$$

$$|H_3| = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 42 > 0$$

وبالتالي فإن H هو أكيد الايجابية وهذا يعني أن الدالة محدبة f est convexe sur R^3

مثال08: هل الدالة f محدبة أم مقعرة؟

$$f(x,y)=x^2-y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x \text{ and } \frac{\partial f}{\partial y}=-2y \Rightarrow x^*=y^*=0$$

$$H(x,y)=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$|H_1|=2>0$$

$$|H_2|=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}=-4\prec 0$$

وبالتالي فإن H هو ليس أكيد الايجابية ولا أكيد السلبية وبالتالي فإن النقطة $x^*=y^*=0$ هي نقطة سرجية.
Since H is neither positive definite nor negative definite, the point ($x^*=0$, $y^*=0$) is a saddle point.

إيجاد نقطة استقرارية بالطرق التكرارية:

في بعض الحالات عندما تكون مجموعة المعادلات: $\nabla f(x))=0$ معادلات غير خطية قد يكون من الصعب حلها جبريا –لذلك نلجأ في هذه الحالات الى الطرق التقريبية العددية لتحديد نقاط الاستقرار وتعتبر طريقة نيوتن-رافسون وطريقة أقصى ميل صعود/ نزول أحد وأهم هذه الطرق سوف نقدمها فيما يلي:

3- الأمثلية غير الخطية بدون قيود: طريقة نيوتن – رافسون.

تبحث طريقة نيوتن رافسون على مبدأ حساب نقطة الاستقرار للدالة (صغرى موضعية) عبر خطوات (عملية تكرارية Itération) وتحديد نقاط $x_1,x_2,x_3..x_n$ انطلاقا من نقطة بداية مفترضة x_0، في كل خطوة نحسب $H(x)$ و $\nabla f(x)$ ونتحقق من انعدام شعاع المتدرج $\nabla f(x)=0$. وفي حالة $\nabla f(x)\neq 0$ نبحث عن نفطة x_{k+1} وهي معرف بالعلاقة التكرارية التالية:

$$x_{k+1}=x_k-H^{-1}(x_k)\nabla f(x_k)$$

خوارزمية نيوتن رافسون :

خطوة 0: ليكن x^0 نقطة بداية:

- إذا كان:

$$\nabla f(x^0)=0 \text{ أو } \|\nabla f(x^0)\|<\varepsilon;\forall\varepsilon>0$$

$(x^*, f(x^*))$ نقول عنها صغرى موضعية min local لـ f قف.

- غير ذلك ننقل إلى خطوة 1 :

خطوة 1: نحسب

$$x^{k+1}=x^k-\left(\nabla^2 f(x^k)\right)^{-1}\nabla f(x^k)$$

ضع $k=k+1$ ونعود إلى الخطوة 0.

مثال09: باستخدام طريقة نيوتن رافسون، أوجد نقطة استقرار الدالة التالية:

$f(x,y) = x^3 + 2(x-y)^2 - 3x\ ,\ X_0 = (0.5\ ,\ 0.5)^T.$

الحل:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 + 4(x-y) - 3 \\ -4(x-y) \end{pmatrix} \text{ , et } \quad H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x+4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

الخطوة "0"

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} \qquad \nabla f(X_0) = \begin{pmatrix} -2.25 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad H(X_0) = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$H^{-1}(X_0) = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 7/12 \end{pmatrix}$$

Test: $\nabla f(X_0) = \begin{pmatrix} -2.25 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

الخطوة "1"

On calcule X_1 :

$$X_1 = X_0 - \nabla f(X_0) * H^{-1}(X_0) = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2.25 \\ 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 7/12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.25 \\ 1.25 \end{pmatrix}$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1.25 \\ 1.25 \end{pmatrix} \qquad \nabla f(X_1) = \begin{pmatrix} 1.6875 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad H(X_1) = \begin{pmatrix} 11.5 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$H^{-1}(X_0) = \begin{pmatrix} 2/15 & 2/15 \\ 2/15 & 3/30 \end{pmatrix}$$

Test: $\nabla f(X_1) = \begin{pmatrix} 1.6875 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

الخطوة "2"

On calcule X_2

$$X_2 = X_1 - \nabla f(X_1) * H^{-1}(X_1) = \begin{pmatrix} 1.25 \\ 1.25 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1.6875 \\ 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2/15 & 2/15 \\ 2/15 & 3/30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.025 \\ 1.025 \end{pmatrix}$$

Test: $\nabla f(X_2) = \begin{pmatrix} 0.1519 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

الخطوة "3"

$$X_3 = X_2 - \nabla f(X_2) * H^{-1}(X_2) = \begin{pmatrix} 1.025 \\ 1.025 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.1519 \\ 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0.0985 & 0.0985 \\ 0.0985 & 0.15050 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.025 \\ 1.025 \end{pmatrix} -$$
$$\begin{pmatrix} 0.0985 * 0.1519 & 0.0985 * 0 \\ 0.0985 * 0.1519 & 0.15050 * 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.025 \\ 1.025 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,01496 \\ 0,01496 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Test: $\nabla f(X_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{X_{opt}} = \boldsymbol{X_3} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$

وبالتالي فإن $x^* = x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ هي نقطة الاستقرارية.

4– الأمثلية غير الخطية بدون قيود: طريقة أقصى ميل صعود(نزول).

$\nabla f(x)$ كما أشرنا سابقا هو المتجه المتدرج أو ما يسمى الاتجاه الانحداري أو انحدار الدالة، اذا كان:

- **سالب** يمثل اتجاه النزول الأقصى $(\boldsymbol{Steepes\ Decent}) \leftarrow \text{Min}$

$$S_k = -\nabla f(x^{(k)})$$

- **موجب** يمثل اتجاه الصعود الأقصى $(\boldsymbol{Steepes}\ as\boldsymbol{cent}) \leftarrow \text{Max}$

$$S_k = \nabla f(x^{(k)})$$

4–1– طريقة أقصى ميل نزول $(\boldsymbol{Steepest\ Decent\ Method})$

يمكن تلخيص الخطوات التكرارية لخوارزمية أقصى ميل نزول كما في الخطوات التالية:

الخطوة "0"

نختار متجها أوليا x_0

– نحسب$S_k = -\nabla f(x_k)$، اذا كان $\nabla f(x) = 0$ فإن النقطة x_0 نقطة استقرارية، انظر الى طبيعة هذه النقطة حسب مصفوفة هس، قف

غير ذلك ننتقل الى الخطوة 1

الخطوة "1": نحسب $x_{k+1} = x_k + \lambda_k S_k$

نجد طول الخطوة الأمثلλ_k وذلك بحل مسألة التصغير ذات متغير واحد

$$Min.\{f(x_k + \lambda S_k)\}$$

شرط $\lambda_k^* \geq 0$

$$\frac{df}{d\lambda} = 0; \qquad \frac{d^2 f}{d\lambda^2} \geq 0$$

أو يمكن حسابه مباشرة كما يلي:

$$\lambda_k = \lambda_k^* = \frac{-[\nabla f(x^{(k)})]^T S_k}{(S_k)^T \nabla^2 f(x^{(k)}) d S_k}$$

نعوض :

$$\mathbf{x} \rightarrow x^{k+1}$$

- إذا كان : $\nabla f\left(x^{k+1}\right)=0$

إذن : $\left(x^{k+1}, f\left(x^{k+1}\right)\right)$ هي **Min** f قف.

- غير ذلك ننتقل إلى الخطوة 2

4-2- طريقة أقصى ميل صعود (*Steepest Ascent Method*)

تختلف خوارزمية أقصى ميل صعود عن خوارزمية أقصى ميل نزول في كونها تستخدم الاتجاه موجب في ايجاد اتجاه البحث وتتلخص خطواتها التكرارية كما يلي:

الخطوة "0"

نختار متجها أوليا x_0

- نحسب $S_k = \nabla f(x_k)$، اذا كان $\nabla f(x)=0$ فإن النقطة x_0 نقطة استقرارية، انظر الى طبيعة هذه النقطة حسب مصفوفة هس، قف

غير ذلك ننتقل الى الخطوة 1

الخطوة "1": نحسب $x_{k+1} = x_k + \lambda_k S_k$

نجد طول الخطوة الأمثل λ_k وذلك بحل مسألة التعظيم ذات متغير واحد

$$Max.\{f(x_k + \lambda S_k)\}$$

شرط $\lambda_k^* \geq 0$

$$\frac{df}{d\lambda}=0; \qquad \frac{d^2 f}{d\lambda^2} \leq 0$$

نعوض :

$$\mathbf{x} \rightarrow x^{k+1}$$

- إذا كان : $\nabla f\left(x^{k+1}\right)=0$

إذن : $\left(x^{k+1}, f\left(x^{k+1}\right)\right)$ هي تعظيم max لـ f قف.

- غير ذلك ننتقل إلى الخطوة 2