للمصفوفات دور مهم في الاقتصاد، إذ تعتبر طريقة بسيطة ومنظمة للتعبير عن العلاقة الخطية بين متغيرين أو أكثر، كما تساعد في حل جمل المعادلات الخطية وتحديد ما إذا كان يوجد حل قبل إجراء المحاولة.

1- تعريف المصفوفة (Definition of Matrix)

تعريف 8-1. *المصفوفة هي شكل مستطيل يشبه الجدول، مؤلف من أسطر وأعمدة، بحيث يشترك كل سطر مع عمود بعدد ذي قيمة حقيقية، تسمى هذه الأعداد بعناصر المصفوفة. يرمز للمصفوفات بإحدى الحروف اللاتينية الكبيرة A، B، C،... ولعناصرها بإحدى الحروف الصغيرة a، b، c،... التي يرفق معها رقمان يشيران للسطر والعمود اللذين يشتركان بهذا العنصر.* [1]

الشكل العام لكتابة مصفوفة A يعطى كالآتي

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}=\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$$

المصفوفة A تتألف من m سطر و n عمود وفي هذه الحالة، نقول أن A من الدرجة (m,n) أو $(m\times n)$ ونكتب $A(m,n)$ أو $A_{m,n}$ أو $A\in M_{m,n}(R)$ بحيث $M_{m,n}(R)$ هي مجموعة المصفوفات ذات m سطر و n عمود بمعاملات حقيقية. العنصر a_{ij} يمثل العدد الحقيقي الذي يقع في تقاطع السطر i مع العمود j. [2]

2- مصفوفات خاصة (Special Matrices)

2-1- مصفوفة سطر (Row Matrix)

مصفوفة سطر هي المصفوفة التي تتألف من سطر واحد وعدد من الأعمدة، أي درجتها $(1,n)$. [3]

2-2- مصفوفة عمود (Column Matrix)

مصفوفة عمود هي المصفوفة التي تتألف من عدد من الأسطر وعمود واحد ودرجتها $(m,1)$. [4]

2-3- مصفوفة العنصر الواحد (One Element Matrix)

مصفوفة العنصر الواحد هي المصفوفة التي تتألف من سطر واحد وعمود واحد أي درجتها $(1,1)$.

2-4- المصفوفة الصفرية (Null or Zero Matrix)

تسمى المصفوفة التي جميع عناصرها أصفارا بالمصفوفة الصِفرية ويرمز لها بالرمز 0 بغض النظر عن درجتها. [5]

---

[1] ثائر فيصل شاهر، سامر محمد عكور. المرجع السابق، ص ص. 417-418.

[2] Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit, p. 219.

[3] Ibid, p. 219.

[4] Ibid, p. 219.

[5] ثائر فيصل شاهر، سامر محمد عكور. المرجع السابق، ص. 422.

2-5- المصفوفة المربعة (Square Matrix)

- نسمي A مصفوفة مربعة، إذا تساوى فيها عدد الأسطر مع عدد الأعمدة، أي درجتها (n,n) ونقول اختصارا أنها من الدرجة n ونكتب A_n أو

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}=\left(a_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}\in M_n(R)$$

وتسمى العناصر $a_{11},a_{22},...,a_{nn}$ بعناصر القطر الرئيسي (principal diagonal) ل A.

- نسمي أثر (trace) A، مجموع عناصر القطر الرئيسي ويرمز له ب $tr(A)$ ونكتب

$$(1)\quad tr(A)=a_{11}+a_{22}+...+a_{nn}=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$$

2-6- المصفوفة المثلثية (Triangular Matrix)

2-6-1- المصفوفة المثلثية العلوية (Upper Triangular Matrix)

نسمي مصفوفة مربعة A مصفوفة مثلثية علوية، إذا كانت جميع عناصرها تحت القطر الرئيسي أصفارا، أي

$$(2)\quad A=\left(a_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}=\begin{cases} a_{ij}\neq 0; & i\le j \\ a_{ij}=0; & i>j \end{cases}$$

2-6-2- المصفوفة المثلثية السفلية (Lower Triangular Matrix)

نسمي مصفوفة مربعة A مصفوفة مثلثية سفلية، إذا كانت جميع عناصرها فوق القطر الرئيسي أصفارا، أي

$$(3)\quad A=\left(a_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}=\begin{cases} a_{ij}=0; & i<j \\ a_{ij}\neq 0; & i\ge j \end{cases}$$

2-7- المصفوفة القطرية (Diagonal Matrix)

نسمي مصفوفة مربعة A مصفوفة قطرية، إذا كانت جميع عناصرها أصفارا باستثناء القطر الرئيسي، أي

$$(4)\quad A=\left(a_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}=\begin{cases} a_{ij}=0; & i\neq j \\ a_{ij}\neq 0; & i=j \end{cases}$$

ملاحظة 8-1. المصفوفة القطرية هي مصفوفة مثلثية علوية وسفلية في آن واحد.

2-8- مصفوفة الوحدة (Identity or Unit Matrix)

مصفوفة الوحدة هي مصفوفة قطرية، بحيث عناصر قطرها الرئيسي تساوي العدد 1 ويرمز لها بالرمز I أو I_n حيث n درجتها، أي

---

(1) Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit, pp. 220-221.

(2) فتحي خليل حمدان. المرجع السابق، ص. 94.

(3) نفسه، ص. 94.

(4) نفسه، ص. 93.

$$I_n = \begin{cases} a_{ij} = 0; & i \neq j \\ a_{ij} = 1; & i = j \end{cases}$$ (1)

-منقول مصفوفة (Transpose of Matrix)

منقول مصفوفة A هو تغيير أسطرها إلى أعمدة وأعمدتها إلى أسطر ونرمز له بأحد الرموز التالية A' ، A^t أو A^T ، فإذا كان $A=\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ فإن $A^T=\left(a_{ij}^{\ T}\right)_{\substack{1\le j\le n\\1\le i\le m}}$ بحيث $a_{ij}^{\ T}=a_{ji}$ مع $\left(A^T\right)^T=A$. (2)

2-9- المصفوفة التناظرية (Symmetric Matrix)

تكون مصفوفة مربعة $A=\left(a_{ij}\right)_{1\le i,\,j\le n}$ *تناظرية*، إذا كان $A^T=A$ ، أي $\forall i\neq j: a_{ij}=a_{ji}$. (3)

2-10- المصفوفة ضد التناظرية (Skew-symmetric Matrix)

تكون مصفوفة مربعة $A=\left(a_{ij}\right)_{1\le i,\,j\le n}$ *ضد تناظرية*، إذا كان $A^T=-A$ ، أي $\forall i\neq j: a_{ij}=-a_{ji}$ وعناصر القطر الرئيسي معدومة. (4)

3- عمليات على المصفوفات (Matrices Operations)

3-1- تساوي مصفوفتين (Equality of Matrices)

تتساوى مصفوفتان، إذا كانتا من الدرجة نفسها وكانت العناصر المتناظرة في المصفوفتين متساوية، أي، إذا كانت $A=\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ و $B=\left(b_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ مصفوفتين من الدرجة (m,n)، فإن

$A=B$ إذا كان $\forall 1\le i\le m, \forall 1\le j\le n: a_{ij}=b_{ij}$ (5)

3-2- جمع وطرح المصفوفات (Addition and Subtraction of Matrices)

عند جمع أو طرح مصفوفتين يجب أن تكونا من الدرجة نفسها ونجمع أو نطرح العناصر المتناظرة من المصفوفتين، أي إذا كانت $A=\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ و $B=\left(b_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ مصفوفتين من الدرجة (m,n)، فإن

$$A+B=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}},\quad A-B=\left(a_{ij}-b_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} \text{ و } B-A=\left(b_{ij}-a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$$

مصفوفات من الدرجة (m,n) *(بتصرف)*. (6)

نظرية 8-1. لتكن A ، B و C ثلاث مصفوفات من الدرجة نفسها. لدينا

1) (جمع المصفوفات تبديلي) $A+B=B+A$

2) (المصفوفة المعدومة تمثل العنصر الحيادي بالنسبة لعملية جمع المصفوفات) $A+0=0+A=A$

3) (جمع المصفوفات تجميعي) $(A+B)+C=A+(B+C)$ (7)

---

(1) فتحي خليل حمدان. المرجع السابق، ص. 93.

(2) Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit, pp. 219-220.

(3) Stéphane Rossignol. Op. Cit. Définition 10.9, p. 285.

(4) Yadolah Dodge. Op. Cit, p. 224.

(5) ثائر فيصل شاهر، سامر محمد عكور. المرجع السابق، ص. 423.

(6) Stéphane Rossignol. Op. Cit. Définition 9.3, p. 218.

(7) Knut Sydsæter, Peter Hammond, Arne StrØm. Idem, p. 551.

3-3- ضرب مصفوفة بعدد حقيقي (Scalar Multiplication of Matrix)

عند ضرب مصفوفة بعدد ثابت فإننا نضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة بهذا العدد، أي، إذا كانت $A=\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ *مصفوفة من الدرجة* (m,n) *وكان* $\alpha\in R$*، فإن* $\alpha A=\left(\alpha a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ *مصفوفة من الدرجة* (m,n)*.* [1]

4-3- ضرب المصفوفات (Multiplication of Matrices)

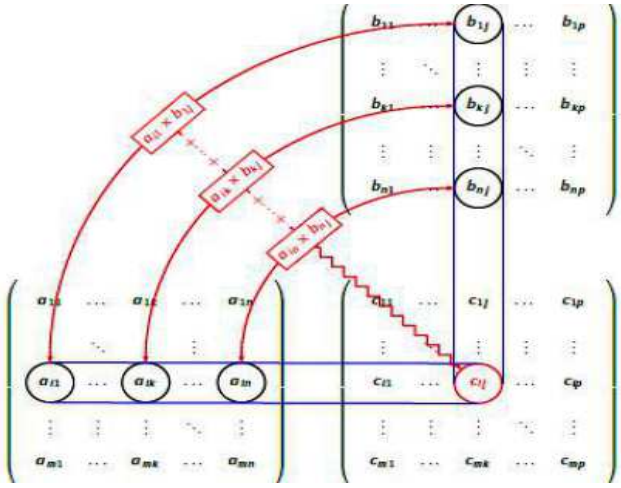
عند ضرب مصفوفتين يجب أن يكون عدد أعمدة المصفوفة الأولى مساويا لعدد أسطر المصفوفة الثانية والمصفوفة الناتجة لها عدد أسطر المصفوفة الأولى وعدد أعمدة المصفوفة الثانية، أي، إذا كانت

$$A=\left(a_{ik}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le k\le n}} \text{ و } B=\left(b_{kj}\right)_{\substack{1\le k\le n\\1\le j\le p}}\text{،}$$

فإن

$$AB=C=\left(c_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le p}} \text{ بحيث } c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

وهذا ما يوضحه الشكل التالي



شكل 8-1- جداء مصفوفتين [2]

نظرية 8-2. *لتكن* A*،* B *و* C *ثلاث مصفوفات تحقق قواعد ضرب المصفوفات. لدينا*

1) (ضرب المصفوفات تجميعي) $(AB)C=A(BC)$

2) (ضرب المصفوفات توزيعي على الجمع من اليسار) $A(B+C)=AB+AC$

3) (ضرب المصفوفات توزيعي على الجمع من اليمين) $(A+B)C=AC+BC$ [3]

4) (ضرب المصفوفات ليس تبديليا) $AB\neq BA$

5) (مصفوفة الوحدة I *محايدة في عملية ضرب المصفوفات)* $AI=IA=A$

6) (المصفوفة المعدومة 0 *عنصر ماص في عملية ضرب المصفوفات)* $A0=0A=0$

7) $(AB)^T=B^TA^T$

8) $A^n=\underbrace{A.A...A}_{n\text{ مرة}}$ *مع* $n\in N$ [4]

---

(1) Stéphane Rossignol. Op. Cit. Définition 9.4, p. 219.

(2) Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit, p. 222.

(3) Knut Sydsæter, Peter Hammond, Arne StrØm. Idem, p. 556.

(4) ثائر فيصل شاهر، سامر محمد عكور. المرجع السابق، ص ص. 436-438.