Chapitre 7

Les Matrices

7.1 Généralités sur les matrices

7.1.1 Définitions et notations

Dans ce chapitre, IK désigne un Corps (IK $= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Définition 7.1 *1. Une matrice est une représentation d'un tableau rectangulaire de $n \times p$ éléments de $\mathbb{N}^*$, se comporte de n lignes et de p colonnes:*

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}, \ a_{ij} \in IK.$$

2. Une matrice est une représentation d'un tableau de nombres sur laquelle on peut faire quelques opérations algébriques: addition, soustraction, multiplication...

Remarque 7.1 *1. On la note $M = M_{(n,p)} = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq p}$, le premier indice est l'indice de ligne et la deuxième est l'indice de colonne.*

2. L'ensemble des matrices de type $(n,\ p)$ *sur IK est noté* $\mathcal{M}_{n,\ p}(IK)$.

Définition 7.2 *Si* n *est le nombre de lignes d'une matrice* M *et* p *le nombre de ses colonnes, alors la dimension (le rang ou le format) de* M *est* $($*nombre de lignes, nombre de colonnes*$) = (n, p)$,

Cas Particuliers :

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,\ p}(\mathrm{IK})$.

1. Si $n = p$ alors M est dite une matrice carrée d'ordre n et on écrit : $M \in \mathcal{M}_n(\mathrm{IK})$. Par exemple:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ i & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

2. Si $p = 1$, on dit que M est une matrice colonne. Par exemple:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C}), \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}).$$

3. Si $n = 1$, on dit que M est une matrice ligne. Par exemple:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{R}), \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{R}).$$

4. Une matrice est dite la matrice nulle si tous ses éléments sont nuls. Autrement dit

$$0_{n,p} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}).$$

5. Une matrice carrée d'ordre n de terme général $a_{i,j}$ est diagonale si $a_{i,j} = 0, \forall i \neq j$, c'est à dire que les éléments de M sont tous nuls sauf la diagonale principale

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & ... & a_{ii} & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathrm{IK}).$$

Par exemple

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \ B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}).$$

6. On appelle matrice identité d'ordre n la matrice carrée diagonale, où tous ses éléments diagonaux sont égaux à 1 et des 0 ailleurs. Définie par :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

Par exemple:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \ I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

7.1.2 Opérations sur les matrices

Addition :

Pour additionner ou soustraire deux ou plusieurs matrices, elles doivent avoir la même dimension c'est à dire le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes.

$$\begin{array}{rcl} \pm : & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ & \left((a_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq p}, (b_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq p}\right) & \mapsto (a_{ij} \pm b_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq p} \end{array}$$

La matrice $(a_{ij} + b_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq p}$ définie par la formule

$$\begin{aligned} (a_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq p} + (b_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq p} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1j}+b_{1j} & \dots & a_{1p}+b_{1p} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2j}+b_{2j} & \dots & a_{2p}+b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \dots & a_{ij}+b_{ij} & \dots & a_{ip}+b_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \dots & a_{nj}+b_{nj} & \dots & a_{np}+b_{np} \end{pmatrix} \\ &= (a_{ij} + b_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq p} \end{aligned}$$

La matrice $(a_{ij}-b_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq p}$ définie par la formule

$$\begin{aligned}
(a_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq p}-(b_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq p} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1j} & ... & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2j} & ... & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{ij} & ... & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nj} & ... & a_{np} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1j} & ... & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2j} & ... & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & ... & b_{ij} & ... & b_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{nj} & ... & b_{np} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & ... & a_{1j}-b_{1j} & ... & a_{1p}-b_{1p} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & ... & a_{2j}-b_{2j} & ... & a_{2p}-b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}-b_{i1} & a_{i2}-b_{i2} & ... & a_{ij}-b_{ij} & ... & a_{ip}-b_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}-b_{n1} & a_{n2}-b_{n2} & ... & a_{nj}-b_{nj} & ... & a_{np}-b_{np} \end{pmatrix} \\
&= (a_{ij}-b_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq p}
\end{aligned}$$

Remarque : Si deux matrices A et B ne sont pas de même type, la somme $A+B$ n'est pas définie.

Exemple 126 *Soient*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer lorsque c'est possible $A+B$ et $A\pm C$.

Solution

1. A et B deux matrices de même dimension, alors

$$\begin{aligned} A+B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{(2,3)} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}_{(2,3)} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}_{(2,3)}. \end{aligned}$$

2. Nous ne pouvons pas, ni additionner, ni soustraire $A_{(2,3)}$ et $C_{(2,2)}$ car elles n'ont pas les mêmes dimensions.

Multiplier une matrice par un scalaire :

Le produit d'une matrice $A = (a_{ij})$ de type (n, p) par un scalaire $\lambda \in$IK est la matrice λA de même type définie par :

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1p} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \lambda a_{ij} & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \dots & \lambda a_{np} \end{pmatrix}.$$

c'est à dire, on multiplie tous les éléments de la matrice A par le scalaire λ.

Exemple 127 *Soit*

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

alors

$$6M = \begin{pmatrix} 18 & 0 \\ -12 & -12 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Remarque : *De la même manière, pour factoriser un nombre d'une matrice, on le* *factorise de tous les éléments de cette matrice. Par exemple*

$$\frac{1}{3}M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Égalité :

Soient $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq p}$ et $B = (b_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq p}$.

On dit que $A = B$ si et seulement si A et B ont la même dimension et tous les éléments de A et de B sont égaux terme à terme, c'est à dire

$$a_{ij} = b_{ij},\ \forall i \in \{1, n\},\ \forall j \in \{1, p\}.$$

Exemple 128 *Soient*

$$A = \begin{pmatrix} x & 5 \\ 0 & 2x \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} y & 2 \\ -1 & 3y \end{pmatrix}.$$

Déterminer x et y pour que $3A + 2B = \begin{pmatrix} -5 & 19 \\ -2 & -16 \end{pmatrix}$.

Solution

1) A et B ont la même dimension $(2, 2)$.

2) Calculer $3A + 2B$,

$$\begin{aligned} 3A + 2B &= 3\begin{pmatrix} x & 5 \\ 0 & 2x \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} y & 2 \\ -1 & 3y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3x & 15 \\ 0 & 6x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2y & 4 \\ -2 & 6y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3x + 2y & 19 \\ -2 & 6x + 6y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pour que $3A+2B=\begin{pmatrix}-5 & 19\\ -2 & -16\end{pmatrix}$, *il faut donc résoudre le système*

$$\begin{cases} 3x+2y=-5 \\ 6x+6y=-16 \end{cases}.$$

Alors

$$A=B \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{3} \\ y=-3. \end{cases}$$

Produit matriciel :

a) **Produit d'une matrice ligne par une matrice colonne :**

On multiplie une matrice ligne $x=(x_i)_{1\leq i\leq n}$ par une matrice colonne $y=(y_j)_{1\leq j\leq n}$ de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}_{(1,n)} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{(n,1)} = x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$$

Remarque : Le produit d'une matrice ligne par une matrice colonne est un scalaire.

Exemple 129

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}_{(1,3)} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{(3,1)} = 2.1+3.(-1)+4.0=-1.$$

b) **Produit de deux matrices :**

Pour multiplier deux matrices $A=(a_{ij})$ et $B=(b_{ij})$, il faut que le nombre de colonnes de la $1^{ère}$ matrice A soit égale au nombre de lignes de la $2^{ième}$ matrice B.

Le produit matriciel $A_{(n,p)} \times B_{(p,q)}$ est la matrice $A \times B = (a_{ij}) \times (b_{jk}) = C = (c_{ik})$ de type (n, q) et la matrice $C = (c_{ik})$ définie par la formule

$$\begin{aligned} c_{ik} &= a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{ip}b_{pk} \\ &= \sum_{j=1}^{p} a_{ij}b_{jk},\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq k \leq q. \end{aligned}$$

Exemple 130 *Soient*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

M est de format (3,2) et N est de format (2,4), donc le produit de M par N est bien définie donc la multiplication entre M et N est possible et le résultat est une matrice de format (3,4). Donc

$$\begin{aligned} M \times N &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où

$$\begin{cases} a_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = 1.1 + 3.(-3) = -8 \\ a_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \\ a_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 5 \\ a_{14} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = 2.1 + 1.(-3) = -1 \\ a_{22} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \\ a_{23} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 5 \\ a_{24} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{31} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = 1.1 + 1.(-3) = -2 \\ a_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \\ a_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \\ a_{34} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \end{cases} .$$

Ainsi

$$M \times N = \begin{pmatrix} -8 & 1 & 5 & 5 \\ -1 & 2 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarques :

1. Le produit de deux matrices A et B n'est défini que si le nombre de colonnes de A est le même que le nombre de lignes de B.

2. Le produit matriciel n'est pas commutatif $M \times N \neq N \times M$. Comme dans l'exemple précédent, $M \times N$ est défini mais $N \times M$ n'est pas possible car le nombre de colonnes de N n'est pas égale au nombre de lignes de M (c'est à dire $N \times M$ n'est pas défini).

3. $M \times N = 0$ ne veut pas dire nécessairement, que l'une des deux matrices est nulle .

4. Si $A \times N = A \times M$, on n'a pas forcément $M = N$.

5. Pour toute matrice carrée A d'ordre n, on a : $A \times I_n = I_n \times A = A$.

Transposition :

Étant donnée une matrice $M_{(n,p)}$ d'ordre (n,p), sa transposé est la matrice (a_{ji}) d'ordre (p,n), obtenue en transformant ses lignes en colonnes. La nouvelle matrice obtenue après cette opération est notée ${}^tM_{(n,p)}$ ou ${}^TM_{(n,p)}$ ou bien $M'_{(n,p)}$.

Exemple 131

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow {}^tB = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies {}^tC = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Propriétés:

- ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$.
- ${}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA$.
- ${}^t(AB) = {}^tB\, {}^tA$. (Attention à l'ordre)
- ${}^t({}^tA) = A$.

7.1.3 Matrices carrées

Pour deux matrices carrées A et B d'ordre n, les opérations $A+B$, AB et BA sont toujours définies. De plus on peut calculer A^2, $A^3, \ldots, A^k$.

Puissance d'une matrice carrée:

Définition 7.3 *Soient A une matrice carrée d'ordre n et $k \in \mathbb{N}$.*

La puissance $k^{\text{ème}}$ de A, que l'on note A^k est la matrice carrée d'ordre n, définie par récurrence:

$$\begin{cases} A^0 = I_n \\ A^k = \underbrace{A \times A \times ... \times A}_{k\ fois} \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Propriétés : Soient A une matrice carrée d'ordre n et λ un scalaire. Alors on a pour tous $k, l \in \mathbb{N}$:

- $A^k \times A^l = A^{k+l}$
- $\left(A^k\right)^l = A^{k \times l}$
- $(\lambda A)^k = \lambda^k A^k$
- $(I_n)^k = I_n$
- $(0_n)^k = 0_n$.

Exemple 132 *1) Calculer A^2 où$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.*

$$\begin{aligned} A^2 &= A \times A \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2) Calculer A^n, pour $n \in \mathbb{N}$ où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} A^0 &= I_3, \\ A^1 &= A, \\ A^2 &= A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ A^3 &= A^2 \times A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3. \end{aligned}$$

Donc $A^n = 0_3$, $\forall n \geq 3$.

Remarques :

1) Ne pas élever les éléments de A au carrée, ça n'a aucun sens, ce n'est pas une opération possible pour les matrices.

2) Quand la matrice est carrée diagonale, nous pouvons calculer sa puissance n-ième, en levant directement ses éléments diagonaux à la puissance énième. Par exemple

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ est diagonale, alors } A^2 = \begin{pmatrix} (i)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (3)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Formule du binôme de Newton. Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n.

$$\begin{aligned} (A+B)^2 &= (A+B)(A+B) \\ &= A(A+B) + B(A+B) \\ &= A^2 + AB + BA + B^2. \end{aligned}$$

Remarque :$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ en général, mais si $AB = BA$ alors

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

Proposition 7.1 *Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n. Si A, B commutent $(AB = BA)$, alors pour tout $m \in \mathbb{N}$:*

$$(A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k A^k B^{m-k}.$$

7.1.4 Matrices Inversibles

Définition 7.4 *On dit qu'une matrice carrée A d'ordre n est inversible s'il existe une matrice carrée B d'ordre n, telle que*

$$A \times B = B \times A = I_n.$$

B est appelée l'inverse de la matrice A et est notée A^{-1}.

Proposition 133 *Soit A une matrice carrée d'ordre n. S'il existe une matrice B d'ordre n telle que $A \times B = I_n$ alors B est unique. .*

Propriétés :

• Si $A \times B = I_n$ (resp si $B \times A = I_n$) alors A est inversible et $A^{-1} = B$.

Il suffit de calculer AB ou BA.

• Si A et B sont inversibles alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. (Attention à l'ordre) .

• Si A est inversible alors A^k est inversible et on a $\left(A^k\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^k$.

• Si A est inversible et $\lambda \neq 0$ alors λA est inversible et $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}A^{-1}$.

• Si A est inversible alors A^t est inversible et $\left(A^t\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t$.

Remarques :

1. Cela n'a pas de sens de parler de matrice inversible pour des matrices non carrées.
2. Puisque $I_n^2 = I_n \times I_n = I_n$ alors I_n est inversible et son inverse est $I_n^{-1} = I_n$.

Calcul des déterminants

Définition 7.5 *Le déterminant d'une matrice carrée A, noté* $\det(A)$ *ou* $|A|$ *ou* Δ, *est un nombre réel.*

Déterminant d'une matrice d'ordre 2 En dimension 2, le déterminant est très simple à calculer

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Exemple 134 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, *alors*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 3 - 2(-1) = 5.$$

Co-facteurs

Définition 7.6 *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \ a_{i,j} \in IK.$$

Le cofacteur de A associé à la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $j^{\text{ième}}$ colonne, noté $cof(a_{ij})$, est la multiplication de $(-1)^{i+j}$ par le déterminant de A_{ij} d'ordre $(n-1)$, obtenu en enlevant la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $j^{\text{ième}}$ colonne de A, donc:

$$cof(a_{ij}) = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

où

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \dots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \dots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Exemple 135 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, *alors*

$$cof(a_{11}) = cof\,(1) = (-1)^2 \det \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 10$$

$$cof(a_{12}) = cof\,(0) = (-1)^3 \det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = -16$$

$$cof(a_{13}) = cof\,(-3) = (-1)^4 \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = -22$$

$$cof(a_{21}) = cof\,(2) = (-1)^3 \det \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 3 \;\; etc\ldots$$

Déterminants d'ordres supérieurs à 2 Soit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \;\; a_{i,j} \in \mathrm{IK}.$$

Pour calculer le déterminant de A, on doit d'abord choisir une ligne i, ensuite appliquer la formule suivante:

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{i1}cof(a_{i1}) + a_{i2}cof(a_{i2}) + \cdots + a_{in}cof(a_{in}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}cof(a_{ij}). \end{aligned}$$

Remarques :

1) Nous pouvons aussi développer le déterminant par rapport aux colonnes, par la formule suivante:

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{1j}cof(a_{1j}) + a_{2j}cof(a_{2j}) + \cdots + a_{nj}cof(a_{nj}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}cof(a_{ij}). \end{aligned}$$

2) Si A est triangulaire supérieur (resp. inférieur) alors $\det(M) = a_{11} \times a_{22} \times a_{33} \times \ldots \times a_{nn}$.

3) Si l'on échange 2 lignes dans une matrice, (respectivement 2 colonnes), le déterminant change de signe et garde la même valeur.

· Pour calculer le déterminant d'une matrice, on développe suivant la ligne (resp colonne) qui contient le plus de 0.

Exemple 136 *Calculer le déterminant de* $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 20.$$

La Régle de Sarrus La régle de Sarrus n'est valable que pour calculer un déterminant d'une matrice d'ordre 3. Elle consiste à écrire les 3 colonnes du déterminant, puis à répeter les deux premières. Pour chacune des 6 diagonales qui apparaissent, on effectue le produit des termes qui apparaissent suivant le schéma suivant :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{11} & & a_{12} \\ & \searrow & & \searrow\swarrow & & \searrow\swarrow & & \swarrow & \\ a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{21} & & a_{22} \\ & \swarrow & & \searrow\swarrow & & \searrow\swarrow & & \searrow & \\ a_{31} & & a_{31} & & a_{32} & & a_{31} & & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Exemple 137 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 6 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. *alors*

$$\begin{aligned}
\det(M) &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 & 2 & -1 \\ 6 & -1 & 1 & 6 & -1 \\ 4 & 5 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \\
&= [2 \times (-1) \times 3 + (-1) \times 1 \times 4 + (-2) \times 6 \times 5] \\
&\quad - [(-2) \times (-1) \times 4 + 2 \times 1 \times 5 + (-1) \times 6 \times 3] \\
&= -6 - 4 - 60 - 8 - 10 + 18 \\
&= -70.
\end{aligned}$$

Proprétés

· $\det(A) = \det({}^tA)$.

· $\det(AB) = \det(A) \times \det(B) = \det(BA)$.

· $\det(I_n) = 1$ et $\det(0_n) = 0$.

· $\det(A^n) = (\det(A))^n$.

· $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

· Si deux lignes ou deux colonnes sont égales, alors le déterminant est nul.

· Si une colonne (resp ligne) est nulle alors le déterminant est nul.

· Si A est inversible, alors $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Comatrice

Définition 7.7 *La co-matrice de* A, *notée* coA (*ou* $comA$), *est la matrice formée par tous les cofacteurs possibles de* A. *C'est la matrice obtenue en remplaçant les coefficients* a_{ij} *par* $cof(a_{ij})$. *C'est à dire si* $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ *alors* $coA = (cof(a_{ij}))_{1\leq i,j\leq n}$.

Théorème 7.1 *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(IK)$. *A est inversible si et seulement si* $\det(A) \neq 0$ *et* *dans ce cas on a :*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^{t}(coA).$$

Exemple 138 *1. Soit* $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ *alors* $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = (2\times 6) - (4\times 2) = 4 \neq 0$ *donc A est inversible. d'où*

$$\begin{cases} coA = \begin{pmatrix} +6 & -4 \\ -2 & +2 \end{pmatrix} \\ A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{cases}$$

2. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ *alors* $\det(A) = -(-2)\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 2[(-1)\times 4 - (-1)\times 3] = -2 \neq 0$ *donc A est inversible. Nous avons*

$$coA = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 2 \\ -6 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$et\ (coA)^t = \begin{pmatrix} 0 & 8 & -6 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

d'où

$$A^{-1} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 8 & -6 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 3 \\ \frac{-1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$