7.2 Résolution des systèmes d'équations linéaires

Définition 7.8 *Un système de n équations linéaires à p inconnues s'écrit sous la forme suivante :*

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p = b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

où $x_1, x_2, ..., x_p$ sont les inconnues et les nombres a_{ij} sont les coefficients du système (S).

7.2.1 Écriture matricielle d'un système d'équations linéaires

Définition 7.9 *On sépare les coeficients des variables dans une matrice, les variables dans un vecteur colonne et le second membre dans un autre vecteur colonne. (S) s'écrire sous la forme $AX = B$ avec :*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} \\ a_{21} & a_{21} & ... & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{np} \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \ et \ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Exemple 139 *Soit (S) le système de deux équations à deux inconnes*

$$(S)\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$$

Si on pose $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ alors le système (S) s'écrire sous la forme matricielle:

$$A \times X = B.$$

Remarque 7.2 *Si le système donné n'est pas ordonné, nous devons d'abord l'ordonner* *avant d'écrire la forme matricielle. Par exemple:*

$$(S)\begin{cases} x+y-2z-2=0 \\ 2y-z+2x+3=0 \\ y-x+3z=4 \end{cases}$$

Il faut l'écrire correctement

$$(S)\begin{cases} x+y-2z=2 \\ 2x+2y-z=3 \\ -x+y+3z=4 \end{cases}$$

7.2.2 Système homogène

Un système de la forme :

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1p}x_p=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2p}x_p=0 \\ \qquad\qquad .... \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+a_{np}x_p=0 \end{cases}$$

est appelé système d'équations linéaires homogènes.

Tous les systèmes homogènes admettent au moins une solution nulle ou triviale :

$$\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=0 \\ \quad\vdots \\ x_p=0 \end{cases}$$

7.2.3 Les systèmes de cramer

Définition 7.10 *On appelle système de cramer un système linéaire n équations et n inconnues dont la matrice A est inversible* ($detA \neq 0$).

Remarque :

1. Les systèmes de cramer ont une solution unique.

2. Pour les systèmes de cramer, si le second membre est nul ($B = 0$), alors la solution unique est automatiquement

nulle, ($x_1 = 0$, $x_2 = 0, \cdots, x_n = 0$).

7.2.4 Les systèmes non cramériens

Définition 7.11 *On appelle système non cramériens un système linéaire n équations et p inconnues ($n \neq p$) ou un système linéaire n équations et n inconnues dont la matrice A n'est pas inversible* ($\det A = 0$).

Remarque 7.3 *1.* ***Les systèmes ne sont pas carrés.*** *Ce sont les systèmes debout ou couchés.*

2. ***Les systèmes debout.*** *Ce sont les systèmes avec nombre d'équations plus grand que le nombre d'inconnues* ($n > p$).

3. ***Les systèmes couchés.*** *Ce sont les systèmes avec nombre d'inconnues plus grand que le nombre d'équations* ($n < p$).

4. ***Les systèmes augmentés.*** *Ce sont des systèmes où le nombre d'équations est égal au nombre d'inconnues, mais où le déterminant principal est nul* ($detA = 0$).

7.2.5 Résolution des systèmes d'équations linéaires cramériens par la méthode de la matrice inverse- la méthode de Cramer et la méthode de Gauss.

Méthode de la matrice inverse

Soit donné un système de cramer

$$A \times X = B. \tag{1}$$

Puisque A est inversible (A admet une matrice inverse A^{-1}), en multipliant (1) par A^{-1}, on trouve :

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \quad (A^{-1}A = I)$$

donc

$$X = A^{-1}B,$$

Remarque 7.4 *Pour trouver le X, il faut donc calculer A^{-1} puis la multiplier par B.*

Exemple 140 *Soit*

$$(S)\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ \quad 2y + 2z = 2 \\ -x + y + z = 3 \end{cases}$$

- *Le système (S) sous la forme matricielle $A \times X = B$:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

• $\det A = -2 \neq 0$ *donc* A *est inversible avec*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

• *Puisque* A *est inversible alors* $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$.

Finalement, la solution est

$$X = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

d'où

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

Méthode de cramer (ou des déterminants)

Il s'agit donc d'un système de n équations à n inconnues de forme général :

$$(S) \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + ... + a_{1n}X_n = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + ... + a_{2n}X_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + ... + a_{nn}X_n = b_n \end{cases}$$

est représenté sous forme matricielle $AX = B$ avec

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Théorème 7.2 (de cramer) *Le système (S) admet une solution unique, quelque soit le vecteur* $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$*, solution donnée par les formules de cramer:*

$$X_i = \frac{\Delta_{X_i}}{\det A} \qquad \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$$

où

$$\Delta_{X_i} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

C'est le déterminant déduit de $\det A$ *par remplacement de la $i-$ème colonne (celle des coellicients de X_i dans le système), par la colonne du second membre du système B.*

Exemple 141 *Résoudre le systéme suivant par la méthode de cramer:*

$$(S) \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ -2x + y - z = -1 \\ -x + y + z = 0. \end{cases}$$

Posons

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \; et \; B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc le systhème (S) est équivalent à: $AX = B$.

On a $\det A = 3 \neq 0$. *Donc le système (S) est de cramer.*

$$\begin{aligned} \Delta_x &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \\ \Delta_y &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \\ \Delta_z &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1. \end{aligned}$$

Donc la solution unique est

$$\begin{aligned} x &= \frac{\Delta_x}{\det A} = \frac{1}{3} \\ y &= \frac{\Delta_y}{\det A} = 0 \\ z &= \frac{\Delta_z}{\det A} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Méthode du pivot de Gauss

Le but de la méthode du pivot de Gauss est de transformer un système (S) en un autre système triangulaire supérieur.

Définition 7.12 *(Opérations élémentaires sur les lignes d'un système)*

Soit (S) un système linéaire de n équations, à p inconnues, et à coefficients dans IK.

Notons par $L_1, L_2, \cdots, L_n$ les équations de (S).

On appelle opération élémentaire sur les lignes de (S) l'une des opérations suivantes:

Soit

$$(S)\begin{cases} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{cases}$$

Pour résoudre ce système,

1. On peut éliminer x_1 dans les équations L_2, L_3, ...et L_n.
2. Le système (S) est équivalent au nouveau système :

$$(S')\begin{cases} L_1 \\ L_2' \\ \vdots \\ L_n' \end{cases}$$

3. Il suffit alors d'éliminer une autre inconnue, x_2 par exemple dans les équations L_3', L_4', ...et L_n'. Le système (S') est donc équivalent au système suivant :

$$(S")\begin{cases} L_1 \\ L_2' \\ L_3'' \quad \text{etc}\ldots \\ \vdots \\ L_n'' \end{cases}$$

$\vdots$

n. Il suffit alors d'éliminer x_{n-1} dans l'équation $L_n^{\overbrace{\prime\cdots\prime}^{(n-2)\text{ fois}}}$. Le système est donc équivalent au système suivant :

$$\left(S^{\overbrace{\prime\cdots\prime}^{(n-1)\text{ fois}}}\right)\begin{cases} L_1 \\ L_2' \\ L_3'' \\ \vdots \\ L_{n-1}^{\overbrace{\prime\cdots\prime}^{(n-2)\text{ fois}}} \\ L_n^{\overbrace{\prime\cdots\prime}^{(n-1)\text{ fois}}} \end{cases}$$

L'équation $L_n^{\overbrace{\prime\cdots\prime}^{(n-1)\text{ fois}}}$ détermine x_n qui, remplacé dans l'équation $L_{n-1}^{\overbrace{\prime\cdots\prime}^{(n-2)\text{ fois}}}$, détermine x_{n-1}. Ces deux valeurs, remplacées dans l'équation $L_{n-2}^{\overbrace{\prime\cdots\prime}^{(n-3)\text{ fois}}}$, déterminent x_{n-2}....etc.... Ces valeurs $(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_2)$, remplacées dans l'équation L_1, déterminent x_1.

Exemple 142 *Résoudre le système d'équations suivant :*

$$(S)\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 5 & L_1 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 & L_2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = -3 & L_3 \end{cases}$$

Pour résoudre ce système, on peut éliminer x_1 dans les équations L_2 et L_3 en les remplaçant par les équations $L_2' = -2L_1 + L_2$ et $L_3' = L_1 + L_3$ (Puisque cette transformation est réversible alors $L_2 = L_2' + 2L_1 +$ et $L_3 = L_3' - L_1$), donc (S) est équivalent

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 5 & L_1 \\ \quad 8x_2 - 21x_3 = -8 & L_2' \\ -2x_2 + 11x_3 = 2 & L_3' \end{cases}$$

Il suffit alors d'éliminer une autre inconnue, x_2 par exemple dans l'équation L_3', en remplaçant cette dernière (là encore, de façon réversible) par $4 \times L_3' + L_2'$. Le système est donc équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 5 & L_1 \\ \quad\quad 8x_2 - 21x_3 = -8 & L_2' \\ \quad\quad\quad\quad 23x_3 = 0 & L_3'' \end{cases}$$

L'équation L_3'' détermine x_3 $(x_3 = 0)$ qui, remplacé dans l'équation L_2', détermine x_2 $(x_2 = -1)$. Ces deux valeurs, remplacées dans l'équation L_1, déterminent x_1 $(x_1 = 2)$.

7.2.6 Résolution des systèmes d'équations linéaires non cramériens

Soit (S) un système non cramérien de n équations, à p inconnues et à coefficients dans IK.

Pour résoudre ce système non cramérien (S),

1. On extrait un sous-système cramerien d'ordre maximum r.

Remarque 7.5 *Les équations et les inconnues qui forment le sous-système sont dites principales (r équations , à r inconnues). Celles hors le sous-système sont dites auxiliaires ou non principales. Les équations non principales sont les équations de vérification.*

2. On résout le système formé des r équations principales, où les inconnues non principales (si elles existent) sont considérées comme des paramètres et sont reportées au second membre. Puisque le sous-système est cramérien, on peut le résoudre par la méthode de la matrice inverse, la méthode de cramer ou la méthode de Gauss.

Exemple 143 *Résolution du **système couché*** $(S1)$

$$(S1) \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x - y \ + z = 2 \end{cases}$$

1. Choisir un sous-système cramérien (carré + déteminant de sa matrice des cofficients non nul)

$$(S_c)\begin{cases} x+y=1-2z \\ 2x-y\ =2-z. \end{cases}$$

Le déterminant principal $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$

2. On peut utiliser n'importe quelle méthode pour résoudre le système (S_c), avec $z = m \in \mathbb{R}$.

3. Nous avons une infinité de solutions de la forme : $S = \{(x,y,z) = (1-m, -m, m)\}$.

Exemple 144 *Résolution du **système de debout*** $(S2)$

$$(S2)\begin{cases} x-2y=5 \\ 2x+3y=3 \\ 3x+2y=7 \qquad\qquad L_3 \end{cases}$$

1. Choisir un sous-système cramérien

$$(S_c)\begin{cases} x-2y=5 \\ 2x+3y=3. \end{cases}$$

Le déterminant principal $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0.$

2. On peut utiliser n'importe quelle méthode pour résoudre le système (S_c).

3. La solution trouvée est $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$.

4. Remplaçons cette solution $(3,-1)$ dans l'équation L_3 de vérification:

$3\,(3)+2\,(-1)=7$, c'est bien vérifiée, donc le système $(S2)$ possède une solution unique $S = \{(x,y) = (3,-1)\}$.

Exemple 145 *Résolution du* ***système d'augmentés****,*

$$(S2)\begin{cases} x-2y+3z=2 \\ 2x-3y+8z=7 \\ 3x-4y+13z=8 \qquad\qquad L_3 \end{cases}$$

Sous forme matricielle $AX=B$, on aura:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 8 \\ 3 & -4 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

1. $\det A = 0$, nous avons donc une équation de vérification L_3 et un paramètre $z=m\in\mathbb{R}$.

2. Choisir un sous-système cramérien

$$(S_c)\begin{cases} x-2y=2-3z \\ 2x-3y=7-8z \\ 3x-4y+13z=8 \qquad\qquad \mathrm{L}_3 \end{cases}$$

Le déterminant principal $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=1\neq 0.$

3. On peut utiliser n'importe quelle méthode pour résoudre le système (S_c), avec $z=m\in\mathbb{R}$.

4. La solution trouvée est $\begin{cases} x=8-7m \\ y=3-2m \end{cases}.$

5. Il faut voir si la solution $\begin{cases} x=8-7m \\ y=3-2m \end{cases}$ vérifie l'équation L_3 de vérification :

$3(8-7m)-4(3-2m)+13m=12\neq 8$ contradiction, il n'y a donc aucune solution.

7.3 Exercices

7.3.1 Exercices (Les Matrices)

Exercice 1 : Soit la matrice A de composantes

$$\begin{aligned} a_{11} &= 0,\ a_{32} = -6,\ a_{23} = -2, \\ a_{21} &= 13,\ a_{12} = 10,\ a_{31} = 0, \\ a_{22} &= -1,\ a_{13} = 7,\ a_{33} = 2. \end{aligned}$$

1) Écrire les éléments de la matrice A.

2) Donner la dimension (format) de A.

3) Donner ${}^tA$ la transposée de la matrice A, puis préciser son format.

Exercice 2 : On donne

$$A = \begin{pmatrix} x & 5 \\ 0 & 2x \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} y & 7 \\ -1 & y \end{pmatrix}.$$

Trouver x et y pour que

$$A - 2B = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -9 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 : On considère les matrices A, B et C définies par:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer lorsque c'est possible AB, AC, BC, BA, CA, CB.

b) Comparer les produits AB et BA.

c) Calculer B^2:

d) Calculer ${}^t(CA)$ de deux façons différentes.

Exercice 4 : Soient les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice identité.

a) De quel format sont les matrices A, B et C.

b) Calculer les déterminants si c'est posible des matrices A, B et C.

c) Calculer la matrice

$$M = 3A^2 + 3A.$$

d) En déduire que la matrice A est inversible et donner A^{-1}.

Exercice 5 : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ +3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que la matrice A est inversible, puis calculer son inverse.

Exercice 6 : On donne

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2m & 4 \\ m & 0 & 2 \\ -m & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Déterminer les valeurs de m pour que la matrice A soit inversible.

2) Calculer l'inverse de la matrice A pour que $m = 1$, si c'est possible.

Exercice 7 : Calculer les matrices inverses (si elles existent) des matrices diagonales suivantes:

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix},A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Exercice 8 :

1) Calculer les puissances $n^{ièmes}$ des matrices suivantes:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

2) Soit

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -3 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

- Calculer A^2 et A^3.
- En déduire A^k pour tout $k \geq 3$.

7.3.2 Exercices (Résolution des systèmes d'équations linéaires)

Exercice 1 : Soient les systèmes d'équations linéaires suivants :

$$(S1)\begin{cases} x+y+2z=3\\ x+2y+z=1\\ 2x+y+z=0\end{cases},\ (S2)\begin{cases} x-y-z=2\\ x+3y-7=0\\ y-z-4=1\end{cases},\ (S3)\begin{cases} x-3y+7z=-4\\ x+2y-3z=6\\ 7x+3y-z=22\end{cases}.$$

Résoudre: le système $(S1)$ par la méthode de la matrice inverse, le système $(S2)$ par la méthode de cramer (ou méthode des déterminants), le système $(S3)$ par la méthode de Gauss.

Exercice 2 : Résoudre les systèmes suivants:

$$(S1)\begin{cases} x+y=-1 \\ 2x-3y=1 \end{cases}, \quad (S_2)\begin{cases} 2x+6y+10z-4t-14u=6 \\ 6x+2y+2z-4t-2u=2 \\ 4x-2y-6z+14t+10u=4 \\ 6x-4y-10z+14t+16u=2 \end{cases}$$

$$(S_3)\begin{cases} 2x+4y+6z+8t=22 \\ 4x+6y+8z+2t=24 \\ 6x+8y+2z+4t=26 \\ 8x+2y+4z+6t=28 \end{cases}, \quad (S_4)\begin{cases} -3x+y+z+t=1 \\ x-3y+z+t=-2 \\ x+y-3z+t=0 \\ x+y+z-3t=3 \end{cases}$$

Exercice 3 : Soit le système :

$$(S)\begin{cases} x+2y-2z=1 \\ y-z \qquad\quad =3 \\ -x+3z \qquad =3 \end{cases}.$$

1. Donner l'écriture matricielle de système (S).

Résoudre le système (S), par la méthode de cramer puis la méthode de la matrice inverse.

Exercice 4 : On considère le système d'équation linéaire suivant :

$$(S)\begin{cases} -x+y+z=2 \\ x-y\ +z=-4 \\ x+y\ -z=2 \end{cases}$$

a) Donner l'écriture matricielle de système (S).

b) Est-il possible de résoudre le systéme (S) par la méthode de cramer? Si oui donner dans ce cas la solution de (S).

Exercice 5 : Résoudre l'équation $AX = B$ par la méthode de Gauss, avec :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -2 & -2 & -2 \\ 2 & 5 & 10 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6 : Résoudre les systèmes non cramériens suivants :

$$(S1)\begin{cases} x + y = -1 \\ 2x - 3y = 1 \\ 5x - 5y - 1 = 0 \end{cases}, \ (S2)\begin{cases} x + y = -1 \\ 2x - 3y = 1 \\ 5x - 5y = 0 \end{cases}$$

$$(S3)\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + 5y \ - 2z = 3 \end{cases}, \ (S4)\begin{cases} 2x + 3y - z = 2 \\ x + 2y - 6z = 9 \\ x + y + 5z = -7 \end{cases}.$$