في الفصول السابقة، درسنا دوالا من الشكل $f(x)=y$ ذات متغير مستقل وحيد x، لكن العديد من الأنشطة الاقتصادية تتطلب أكثر من متغير مستقل، فمثلا الطلب على سلعة معينة لا يعتمد فقط على سعرها وإنما على دخل المستهلك، سعر السلع البديلة ومتغيرات أخرى. لذلك سندرس الدوال ذات متغيرين ونركز على المشتقات الجزئية وتطبيقاتها الاقتصادية.

1- الدوال ذات متغيرين

تعريف 7-1. *نسمي $z=f(x_1,x_2,...,x_n)$ دالة ذات n متغير مستقل $x_1,x_2,...,x_n$، إذا وجدت قيمة واحدة فقط ل z في مجال صور f من أجل الأعداد الحقيقية $x_1,x_2,...,x_n$ في مجال تعريف f.* [1]

من أجل $n=2$، نسمي $z=f(x,y)$ دالة ذات متغيرين مستقلين x و y من مجال تعريف f، إن وجدت قيمة واحدة فقط ل z في مجال صور f. [2]

تعريف 7-2. *لتكن $f(x,y)$ دالة ذات متغيرين مستقلين. نسمي مجال تعريف f مجموعة الثنائيات (x,y) التي من أجلها تكون f معرفة ونرمز لها بالرمز D_f، بحيث $D_f \subset R^2$.* [3]

2- نهاية دالة ذات متغيرين

-نهاية دالة ذات متغيرين عند نقطة معينة

لتكن $a=(a_1,a_2)\in R^2$ و $f(x,y)$ دالة ذات متغيرين معرفة على جوار I ل a باستثناء محتمل ل a.

تعريف 7-3. *نقول أن f تنتهي إلى عدد حقيقي l عندما ينتهي $X=(x,y)$ إلى $a=(a_1,a_2)$، إذا كان*

$$\forall \varepsilon>0, \exists \eta_\varepsilon>0 : \forall X\in I\{a\}, \|X-a\|<\eta_\varepsilon \Rightarrow |f(X)-l|<\varepsilon$$ (*)

ونكتب

$$\lim_{X\to a} f(X)=l \quad \text{أو} \quad \lim_{\substack{X\to a \\ X\neq a}} f(X)=l$$ [4]

ملاحظة 7-1

1) خواص النهايات لدالة ذات متغير واحد تبقى صالحة لدالة ذات متغيرين.

2) إذا كانت f دالة معرفة عند نقطة a، فإن $\lim_{X\to a} f(X)=f(a)$.

3) بالنسبة لدالة f ذات متغير واحد، وجود نهاية لهذه الدالة عند نقطة a، معناه وجود نهاية مشتركة ل f عن يمين وعن يسار a، أما بالنسبة لدالة ذات متغيرين، فيمكن الاقتراب من نقطة من المستوي على طول عدد لا نهائي من المسارات. [5]

---

[1] Yadolah Dodge. Op. Cit. Définition 7.1, p. 186.

[2] Knut Sydsæter, Peter Hammond, Arne StrØm. Idem, p. 377.

[3] Yadolah Dodge. Op. Cit. Définition 7.3, p. 186.

(*) يشير الرمز "$\|\ \|$" للمسافة بين نقطتين في R^n.

[4] Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca . Op. Cit. Définition 19, p. 298.

[5] Ibid, p. 298.

3- استمرارية دالة ذات متغيرين

-استمرارية دالة ذات متغيرين عند نقطة معينة

تعريف 7-4. *لتكن $a=(a_1,a_2)\in R^2$ و f دالة ذات متغيرين معرفة على جوار I ل a. نقول أن f مستمرة عند a، إذا كان*

$$\lim_{X\to a} f(X)=f(a) \quad (1)$$

تعريف 7-5. *نقول عن دالة f أنها مستمرة على مجال J من R^2، إذا كانت مستمرة عند كل نقطة من J.* (2)

ملاحظة 7-2. خواص الاستمرارية لدالة ذات متغير واحد تبقى صحيحة في حالة دالة ذات متغيرين. (3)

4- المشتقات الجزئية لدالة ذات متغيرين

إذا أعطيت دالة ذات متغيرين $z=f(x,y)$، من أجل قياس أثر التغير في أحد المتغيرين المستقلين x أو y على المتغير التابع z، فإننا بحاجة إلى المشتقة الجزئية. نهتم في هذا الفصل بالمشتقات الجزئية من الدرجة الأولى والثانية.

4-1- المشتقات الجزئية الأولى لدالة ذات متغيرين

تعريف 7-6. *إذا كانت $z=f(x,y)$ دالة ذات متغيرين، فإن*

- *المشتقة الجزئية الأولى ل f بالنسبة ل x هي المشتقة الأولى ل f بالنسبة ل x باعتبار y ثابتا ويرمز لها بأحد الرموز*

$$\frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial}{\partial x}f(x,y),\quad f'_x(x,y)$$

وتعرف كما يلي

$$f'_x(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

إن كانت النهاية موجودة ومنتهية. (4)

- *وبالمثل، فالمشتقة الجزئية الأولى ل f بالنسبة ل y هي المشتقة الأولى ل f بالنسبة ل y باعتبار x ثابتا ويرمز لها بأحد الرموز*

$$\frac{\partial z}{\partial y},\quad \frac{\partial f}{\partial y},\quad \frac{\partial}{\partial y}f(x,y),\quad f'_y(x,y)$$

وتعرف كما يلي

$$f'_y(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

إن كانت النهاية موجودة ومنتهية. (5)

---

(1) Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca . Op. Cit. Définition 20, p. 298.
(2) Ibid. Définition 21, p. 298.
(3) Knut Sydsæter, Peter Hammond, Arne StrØm. Idem, p. 398.
(4) Yadolah Dodge. Op. Cit, p. 189.
(5) Edward T Dowling. Idem, p. 82.

ملاحظة 7-3

1) لإيجاد المشتقة الجزئية لدالة بالنسبة لأحد المتغيرات المستقلة فإننا نعتبر المتغيرات المستقلة المتبقية حدودا ثابتة ونطبق قواعد التفاضل المتعارف عليها. [1]

2) بشكل عام، عدد المشتقات الجزئية الأولى لدالة ذات عدة متغيرات مستقلة يساوي عدد هذه المتغيرات. [2]

- قواعد التفاضل الجزئي

قواعد التفاضل بالنسبة لدالة ذات متغير مستقل واحد التي عرضناها في الفصل الرابع تبقى صالحة للدوال ذات متغيرين مستقلين.

نظرية 7-1. *إذا كانت f و g دالتين قابلتين للاشتقاق ذات متغيرين مستقلين x و y ، فان*

1) $\frac{\partial}{\partial x}(f+g)=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial x}$ و $\frac{\partial}{\partial y}(f+g)=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial y}$

2) $\frac{\partial}{\partial x}(f.g)=\frac{\partial f}{\partial x}.g+f.\frac{\partial g}{\partial x}$ و $\frac{\partial}{\partial y}(f.g)=\frac{\partial f}{\partial y}.g+f.\frac{\partial g}{\partial y}$

3) $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}.g-f.\frac{\partial g}{\partial x}}{g^2}$ بحيث $g(x,y)\neq 0$ و $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{\frac{\partial f}{\partial y}.g-f.\frac{\partial g}{\partial y}}{g^2}$ [3]

4) $\frac{\partial}{\partial x}(f^n)=nf^{n-1}\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial}{\partial y}(f^n)=nf^{n-1}\frac{\partial f}{\partial y}$

5) $\frac{\partial}{\partial x}(e^f)=e^f\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial}{\partial y}(e^f)=e^f\frac{\partial f}{\partial y}$

6) $\frac{\partial}{\partial x}(\ln(f))=\frac{1}{f}.\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial}{\partial y}(\ln(f))=\frac{1}{f}.\frac{\partial f}{\partial y}$ *(بتصرف)* [4]

4-2- المشتقات الجزئية الثانية لدالة ذات متغيرين

بما أن المشتقات الجزئية الأولى لدالة ذات متغيرين هي أيضا دوال ذات متغيرين، فإنه يمكن اشتقاقها جزئيا مرة أخرى لتنتج ما يسمى بالمشتقات الجزئية الثانية.

تعريف 7-7. *لتكن $z=f(x,y)$ دالة ذات متغيرين.*

- *المشتقة الجزئية الثانية ل f بالنسبة ل x_i و x_j هي المشتقة الجزئية ل $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ بالنسبة ل x_i ويرمز لها بأحد الرموز*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j},\quad f''_{x_j x_i}$$

ونكتب

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$$

أي نشتق f للمرة الأولى بالنسبة ل x_j وللمرة الثانية بالنسبة ل x_i. [5]

---

[1] Edward T Dowling. Idem, p. 82.
[2] Yadolah Dodge. Op. Cit, p. 190.
[3] Edward T Dowling. Idem, p. 84.
[4] Ibid, p. 84.
[5] Stéphane Rossignol. Op. Cit. Définition 11.22, p. 311.

- إذا كان $i \neq j$، فان $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ تسمى المشتقات الجزئية الثانية المختلطة ل f .
- إذا كان $i = j$، فان

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^{\,2}} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

تسمى المشتقات الجزئية الثانية الأساسية ل f .

- بالمثل، إن كانت المشتقات الجزئية الثانية قابلة للاشتقاق، فيمكن تعريف المشتقات الجزئية من الرتبة الثالثة وهكذا .

بشكل عام، نعرف المشتقات الجزئية من الرتبة k ل f كما يلي

$$\forall k \geq 2: \quad \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\left(\ldots \frac{\partial f}{\partial x_{i_k}}\right) \quad (1)$$

ملاحظة 7-4

1) عدد المشتقات الجزئية الثانية لدالة ذات عدة متغيرات مستقلة يساوي مربع عدد هذه المتغيرات.

2) عادة ما تجمع المشتقات الجزئية الثانية لدالة ذات عدة متغيرات مستقلة في نقطة a، في مصفوفة[*] هيس (Hesse's Matrix) التالية

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^{\,2}}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^{\,2}}(a) \end{pmatrix}_{n \times n}$$

وفي حالة دالة ذات متغيرين $f(x,y)$ تصبح مصفوفة هيس كالتالي

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \end{pmatrix} \quad \text{(بتصرف)} \quad (2)$$

3) إذا كانت المشتقات الجزئية الثانية المختلطة مستمرة فهي متساوية، أي

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x,y) \quad (3)$$

5- القيم الحدية لدالة ذات متغيرين

عند البحث عن القيم الحدية لدالة ذات متغيرين، نميز حالتين، القيم الحدية لدالة بدون قيود وأخرى بقيود.

5-1- القيم الحدية لدالة ذات متغيرين بدون قيود

لإيجاد القيم الحدية لدالة ذات متغيرين $f(x,y)$ بدون قيود، نتبع الخطوات التالية

---

(1) Stéphane Rossignol. Op. Cit. Définition 11.22, p. 312.

(*) المصفوفة عبارة عن جدول به أسطر وأعمدة، سندرس المصفوفات في الفصل الثامن.

(2) Stéphane Rossignol. Op. Cit. Définition 11.27, p. 322.

(3) Yadolah Dodge. Op. Cit, p. 192.

1) إيجاد المشتقات الجزئية الأولى ل f ومساواتها بالصفر، أي

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$$

بحل المعادلتين الأخيرتين، نحصل على النقط الحرجة (a,b) ل f ، أي

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$$

وهذا ما يسمى بالشرط الضروري أو شرط الدرجة الأولى. [1]

2) إيجاد المشتقات الجزئية الثانية ل f وتشكيل مصفوفة هيس.

3) تعويض قيم النقط الحرجة (a,b) في مصفوفة هيس، أي

$$H_f(a,b)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{pmatrix} \quad (2)$$

4) نحسب محدد[*] مصفوفة هيس، أي

$$\det\left(H_f(a,b)\right)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\right)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)\right)$$

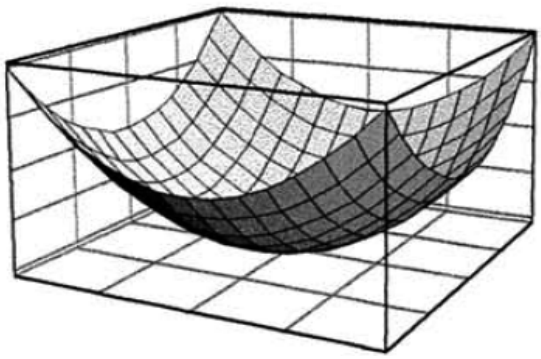
بما أن $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$، فإن

$$\det\left(H_f(a,b)\right)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\right)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right)^2 \quad (3)$$

نميز ثلاث حالات ل $\det\left(H_f(a,b)\right)$.

أ) إذا كان الشرط الكافي أو شرط الدرجة الثانية محققا (أي $\det\left(H_f(a,b)\right)>0$ وكان

أ-1) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)>0$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)>0$، فإن الدالة f تقبل قيمة حدية صغرى $f(a,b)$ عند النقطة الحرجة (a,b) وهذا ما يوضحه الشكل التالي



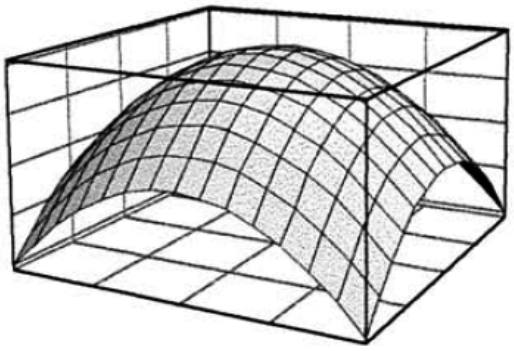
شكل 7-1- منحنى بياني لدالة ذات متغيرين تقبل قيمة حدية صغرى

(1) Yadolah Dodge. Op. Cit, pp. 195-196.
(2) Stéphane Rossignol. Op. Cit, p. 334.

(*) سندرس محدد مصفوفة في الفصل التاسع.

(3) Edward T Dowling. Idem, p. 86.

أ-2) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)<0$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)<0$، فإن الدالة f تقبل قيمة حدية عظمى $f(a,b)$ عند النقطة الحرجة (a,b) وهذا ما يوضحه الشكل التالي

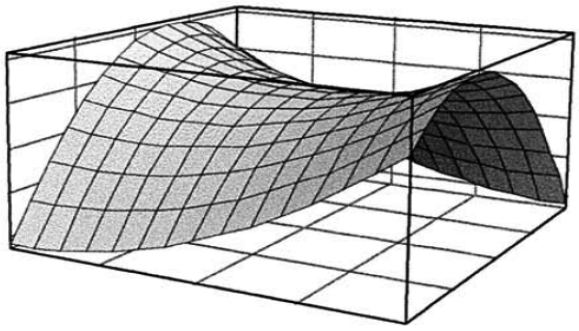


شكل 7-2- منحنى بياني لدالة ذات متغيرين تقبل قيمة حدية عظمى [1]

ب) إذا كان $\det\left(H_f(a,b)\right)<0$، فإن الدالة f لا تقبل قيم حدية وإنما

ب-1) نقطة انعطاف، إذا كان $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$ لهما نفس الإشارة.

ب-2) نقطة سرج(*) (تكون للدالة قيمة صغرى إذا نظرنا من المحور x وقيمة عظمى إذا نظرنا من المحور y)، إذا كان $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$ مختلفتين في الإشارة والشكل التالي يوضح ذلك



شكل 7-3- منحنى بياني لدالة ذات متغيرين تقبل نقطة سرج [2]

ج) إذا كان $\det\left(H_f(a,b)\right)=0$، فإن الدالة f يمكن أن يكون أو لا يكون لها قيم حدية. [3]

5-2- القيم الحدية لدالة ذات متغيرين بقيد

عادة ما تسعى المؤسسات إلى تعظيم أو تقليص الدوال تحت قيود يفرضها السوق أو عوامل الإنتاج أو غيرها.

لإيجاد القيم الحدية لدالة $f(x,y)$ (تُسمى دالة الهدف)، تحت القيد $g(x,y)=k$ (k ثابت)، نتبع الخطوات التالية

1) تحويل دالة القيد إلى دالة صِفرية كما يلي $k-g(x,y)=0$

2) تشكيل دالة لاجرانج

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\left[k-g(x,y)\right]$$

---

[1] Knut Sydsæter, Peter Hammond, Arne StrØm. Idem, p. 466.

(*) سُميت نقطة سرج لأن شكلها يشبه السرج الذي يوضع على الحصان.

[2] ثائر فيصل شاهر، سامر محمد عكور. المرجع السابق، ص ص. 386-387.

[3] نفسه، ص. 388.

حيث λ يسمى معامل (مضاعف) لاجرانج[*] و $L(x,y,\lambda)$ دالة لاجرانج.

3) إيجاد المشتقات الجزئية الأولى لدالة لاجرانج ومساواتها بالصفر، أي

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda)=0 \qquad \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda)=0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda)=0 \quad (1)$$

(وهذا ما يسمى بالشرط الضروري أو شرط الدرجة الأولى) لإيجاد قيم المتغيرات التي تشكل النقط الحرجة (a,b) للدالة L، أي

$$\frac{\partial L}{\partial x}(a,b)=0 \qquad \frac{\partial L}{\partial y}(a,b)=0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda}(a,b)=0$$

4) إيجاد المشتقات الجزئية الثانية لدالة لاجرانج وتشكيل مصفوفة هيس (وهذا ما يسمى بالشرط الكافي أو شرط الدرجة الثانية)، ثم تعويض قيم النقط الحرجة في هذه الأخيرة، أي

$$H_L(a,b)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(a,b) & \frac{\partial^2 L}{\partial y\partial x}(a,b) & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\partial x}(a,b) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}(a,b) & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(a,b) & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\partial y}(a,b) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial \lambda}(a,b) & \frac{\partial^2 L}{\partial y\partial \lambda}(a,b) & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}(a,b) \end{pmatrix}$$

5) حساب محدد مصفوفة هيس، أي

$$\begin{aligned}\det(H_L(a,b)) = {} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(a,b)\left[\left(\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(a,b)\right)\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}(a,b)\right)-\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\partial y}(a,b)\right)\left(\frac{\partial^2 L}{\partial y\partial \lambda}(a,b)\right)\right] \\ & -\frac{\partial^2 L}{\partial y\partial x}(a,b)\left[\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}(a,b)\right)\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}(a,b)\right)-\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\partial y}(a,b)\right)\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial \lambda}(a,b)\right)\right] \\ & +\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\partial x}(a,b)\left[\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}(a,b)\right)\left(\frac{\partial^2 L}{\partial y\partial \lambda}(a,b)\right)-\left(\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(a,b)\right)\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial \lambda}(a,b)\right)\right]\end{aligned} \quad (2)$$

نميز ثلاث حالات.

أ) إذا كان $\det(H_L(a,b))>0$، فإن الدالة f تقبل قيمة حدية عظمى $f(a,b)$ عند النقطة الحرجة (a,b).

ب) إذا كان $\det(H_L(a,b))<0$، فإن الدالة f تقبل قيمة حدية صغرى $f(a,b)$ عند النقطة الحرجة (a,b).

ج) إذا كان $\det(H_L(a,b))=0$، فإن الدالة f يمكن أن يكون أو لا يكون لها قيم حدية. (3)

6- تمارين

تمرين 7-1. أوجد مجالات تعريف الدوال التالية.

$$f(x,y)=2\ln(3x-y)+xy+x^2 \qquad g(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}$$

$$h(x,y)=x^4+y^6 \qquad i(x,y)=\sqrt{x^2+y^2} \qquad j(x,y)=\frac{x}{y}$$

(*) مضاعف لاجرانج يقيس الأثر على دالة الهدف لتغير بسيط في ثابت القيد k.

(1) Knut Sydsæter, Peter Hammond, Arne StrØm. Idem, p. 499.
(2) Ibid, pp. 515-516.
(3) Ibid, pp. 515-516.

الحل. إيجاد مجموعات تعريف الدوال التالية وتمثيلها بيانيا

1) $f(x,y)=2\ln(3x-y)+xy+x^2$

$$D_f=\{(x,y)\in R^2/3x-y>0\}$$
$$=\{(x,y)\in R^2/x>\tfrac{1}{3}y\}$$

2) $g(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}$

$$D_g=\{(x,y)\in R^2/x^2-y^2\geq 0\}$$
$$=\{(x,y)\in R^2/x^2\geq y^2\}$$
$$=\{(x,y)\in R^2/|x|\geq|y|\}$$

3) $h(x,y)=x^4+y^6$ وعليه، h معرفة على R^2، أي $D_h=R^2$.

4) $i(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ وعليه، i معرفة على R^2، أي $D_i=R^2$.

5) $j(x,y)=\dfrac{x}{y}$

$$D_j=\{(x,y)\in R^2/y\neq 0\}$$
$$=R\times R^*$$

تمرين 7-2. أوجد المشتقات الجزئية الأولى والثانية للدوال التالية

$f(x,y)=x^2+y-3xy+5$ $\qquad$ $g(x,y)=(4x-y)(x+8y)$

$h(x,y)=\dfrac{x^2+4y}{x}$ $\qquad$ $i(x,y)=(x+5y)^3$

$j(x,y)=e^{2x-y}$ $\qquad$ $k(x,y)=\ln(3x-y)$

الحل. إيجاد المشتقات الجزئية الأولى والثانية للدوال التالية

1) $f(x,y)=x^2+y-3xy+5$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x-3y$ $\qquad$ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=1-3x$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=2$ $\qquad$ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=0$ $\qquad$ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=-3$

2) $g(x,y)=(4x-y)(x+8y)$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=4(x+8y)+(4x-y)=8x+31y$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=-(x+8y)+8(4x-y)=31x-16y$$

$\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y)=8$ $\qquad$ $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)=-16$ $\qquad$ $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(x,y)=\dfrac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}(x,y)=31$

3) $h(x,y)=\dfrac{x^2+4y}{x}$

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)=\frac{2x(x)-(x^2+4y)}{x^2}=\frac{x^2-4y}{x^2}$$
$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)=\frac{4x}{x^2}=\frac{4}{x}$$
$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y)=\frac{2x(x^2)-2x(x^2-4y)}{x^4}=\frac{8xy}{x^4}=\frac{8y}{x^3}$$
$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,y)=0 \qquad \frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 h}{\partial y\partial x}(x,y)=-\frac{4}{x^2}$$

4) $i(x,y)=(x+5y)^3$

$$\frac{\partial i}{\partial x}(x,y)=3(x+5y)^2 \qquad \frac{\partial i}{\partial y}(x,y)=15(x+5y)^2$$
$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}(x,y)=6(x+5y) \qquad \frac{\partial^2 i}{\partial y^2}(x,y)=150(x+5y) \qquad \frac{\partial^2 i}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 i}{\partial y\partial x}(x,y)=30(x+5y)$$

5) $j(x,y)=e^{2x-y}$

$$\frac{\partial j}{\partial x}(x,y)=2e^{2x-y} \qquad \frac{\partial j}{\partial y}(x,y)=-e^{2x-y}$$
$$\frac{\partial^2 j}{\partial x^2}(x,y)=4e^{2x-y} \qquad \frac{\partial^2 j}{\partial y^2}(x,y)=e^{2x-y} \qquad \frac{\partial^2 j}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 j}{\partial y\partial x}(x,y)=-2e^{2x-y}$$

6) $k(x,y)=\ln(3x-y)$

$$\frac{\partial k}{\partial x}(x,y)=\frac{3}{3x-y} \qquad \frac{\partial k}{\partial y}(x,y)=\frac{-1}{3x-y}$$
$$\frac{\partial^2 k}{\partial x^2}(x,y)=\frac{-9}{(3x-y)^2} \qquad \frac{\partial^2 k}{\partial y^2}(x,y)=\frac{-1}{(3x-y)^2} \qquad \frac{\partial^2 k}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 k}{\partial y\partial x}(x,y)=\frac{3}{(3x-y)^2}$$

تمرين 7-3. لمنشأة تنتج سلعتين x و y، دالة الربح التالية

$$TP(x,y)=-x^2-\frac{1}{2}y^2+40x+30y-100 \qquad \text{وحدة نقدية}$$

- أوجد مستويات الإنتاج من السلعتين x و y التي تعظم الأرباح.
- **الحل.** إيجاد مستويات الإنتاج من السلعتين x و y التي تعظم الأرباح
- إيجاد المشتقات الجزئية الأولى ل TP ومساواتها بالصفر. لدينا

$$\begin{cases}\dfrac{\partial TP}{\partial x}(x,y)=0\\ \dfrac{\partial TP}{\partial y}(x,y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2x+40=0\\ -y+30=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=20\\ y=30\end{cases}$$

ومنه $(20;30)$ نقطة حرجة للدالة TP.

- إيجاد المشتقات الجزئية الثانية ل TP وتشكيل مصفوفة هيس

لدينا

$$\frac{\partial^2 TP}{\partial x^2}(x,y)=-2 \qquad \frac{\partial^2 TP}{\partial y^2}(x,y)=-1 \qquad \frac{\partial^2 TP}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 TP}{\partial y\partial x}(x,y)=0$$

ومنه

$$H_{TP}(x,y)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 TP}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 TP}{\partial y\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial^2 TP}{\partial x\partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 TP}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

وعليه

$$H_{TP}(20;30)=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ومنه

$$\det\left(H_{TP}(20;30)\right)=-2(-1)-(0)^2=2>0$$

وبما أن $\frac{\partial^2 TP}{\partial x^2}(20;30)=-2<0$ و $\frac{\partial^2 TP}{\partial y^2}(20;30)=-1<0$، فإن $TP(20;30)=750$ قيمة حدية عظمى ل TP عند النقطة الحرجة $(20;30)$، أي على المنشأة إنتاج 20 وحدة من السلعة x و 30 وحدة من السلعة y للحصول على أكبر ربح وهو 750 وحدة نقدية.

تمرين 7-4. مصنع ينتج نوعين من السلع x و y وكانت دالة التكلفة الكلية كما يلي

$$TC(x,y)=x^2+2x+y^2 \qquad \text{وحدة نقدية}$$

- أوجد حجم الإنتاج من السلعتين لتخفيض التكاليف إلى أدنى حد ممكن، علما أنه يمكن إنتاج خمس وحدات من كلا النوعين.
- **الحل.** إيجاد حجم الإنتاج من السلعتين لتخفيض التكاليف إلى أدنى حد ممكن. لدينا
- دالة الهدف

$$TC(x,y)=x^2+2x+y^2$$

- دالة القيد

$$g(x,y)=x+y=5$$

- تحويل دالة القيد إلى دالة صفرية

$$5-x-y=0$$

- دالة لاجرانج

$$L(x,y,\lambda)=x^2+2x+y^2+\lambda(5-x-y)$$

- إيجاد المشتقات الجزئية الأولى لدالة لاجرانج ومساواتها بالصفر

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda)=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda)=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2-\lambda=0.....(1) \\ 2y-\lambda=0.....(2) \\ 5-x-y=0.....(3) \end{cases}$$

من المعادلتين (1) و (2) ، نستخرج علاقة تعبر عن λ ، أي

$$\begin{cases} (1)\Leftrightarrow \lambda=2x+2.....(1') \\ (2)\Leftrightarrow \lambda=2y.....(2') \end{cases}$$

بالمساواة بين المعادلتين $(1')$ و $(2')$ ، نجد

$$\begin{aligned} (1')=(2') &\Leftrightarrow 2x+2=2y \\ &\Leftrightarrow y=x+1 \end{aligned}$$

بالتعويض عن عبارة y في المعادلة (3) ، نجد

$$\begin{aligned} (3) &\Leftrightarrow 5-x-(x+1)=0 \\ &\Leftrightarrow 4-2x=0 \\ &\Leftrightarrow x=2 \end{aligned}$$

بالتعويض عن قيمة x في عبارة y ، نجد

$$y=x+1\Leftrightarrow y=2+1=3$$

بالتعويض عن قيمة y في المعادلة $(2')$ ، نجد

$$\begin{aligned} (2') &\Leftrightarrow \lambda=2y \\ &\Leftrightarrow \lambda=2(3)=6 \end{aligned}$$

ومنه $(2;3)$ نقطة حرجة للدالة L من أجل $\lambda=6$.

- إيجاد المشتقات الجزئية الثانية لدالة لاجرانج وتشكيل مصفوفة هيس

لدينا

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x,y,\lambda)=2 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y\partial x}(x,y,\lambda)=0 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\partial x}(x,y,\lambda)=-1$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}(x,y,\lambda)=0 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y,\lambda)=2 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\partial y}(x,y,\lambda)=-1$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial \lambda}(x,y,\lambda)=-1 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y\partial \lambda}(x,y,\lambda)=-1 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}(x,y,\lambda)=0$$

ولدينا

$$H_L(x,y)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 L}{\partial y\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 L}{\partial \lambda\partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 L}{\partial \lambda\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial x\partial \lambda}(x,y) & \dfrac{\partial^2 L}{\partial y\partial \lambda}(x,y) & \dfrac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

أي

$$H_L(x,y)=\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&2&-1\\-1&-1&0\end{pmatrix}=H_L(2;3)$$

وعليه، باستعمال السطر الأول للمصفوفة $H_L(2;3)$، نجد

$$\begin{aligned}\det\left(H_L(2;3)\right)&=2\begin{vmatrix}2&-1\\-1&0\end{vmatrix}-0\begin{vmatrix}0&-1\\-1&0\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}0&2\\-1&-1\end{vmatrix}\\&=2\left[(2.0)-(-1.-1)\right]-0-1\left[(0.-1)-(2.-1)\right]\\&=2(0-1)-1(0+2)\\&=-4<0\end{aligned}$$

ومنه وحـدة نقديـة $TC(2;3)=17$ قيمة حدية صغرى للدالة TC عند النقطة الحرجة $(2;3)$ من أجل $\lambda=6$، أي على المصنع إنتاج وحدتين من النوع x وثلاث وحدات من النوع y للحصول على أدنى تكلفة وهي 17 وحدة نقدية. نلاحظ أن $\lambda=6$، هذا يعني أن النقصان في ثابت القيد من 5 إلى 4 يؤدي إلى النقصان في دالة التكاليف TC بمقدار 6 وحدات نقدية تقريبا.

تمرين 7-5. إذا كانت دالة المنفعة الكلية لمستهلك تأخذ الصورة التالية

$$U(Q_1,Q_2)=Q_1^{\frac{1}{4}}Q_2^{\frac{3}{4}}$$

حيث Q_1 و Q_2 الكمية المشتراة من السلعتين الأولى والثانية على الترتيب. إذا علمت أن سعر السلعتين هو 3 وحدات نقدية للسلعة الأولى ووحدتان نقديتان للسلعة الثانية وأن المستهلك خصص 80 وحدة نقدية للإنفاق عليهما، فكم على المستهلك أن يشتري من كلا السلعتين لتعظيم منفعته الكلية إلى أقصى حد ممكن ؟

الحل. لدينا

- دالة الهدف

$$U(Q_1,Q_2)=Q_1^{\frac{1}{4}}Q_2^{\frac{3}{4}}$$

- دالة القيد

$$g(Q_1,Q_2)=3Q_1+2Q_2=80$$

- تحويل دالة القيد إلى دالة صفرية

$$80-3Q_1-2Q_2=0$$

- دالة لاجرانج

$$L(Q_1,Q_2,\lambda)=Q_1^{\frac{1}{4}}Q_2^{\frac{3}{4}}+\lambda(80-3Q_1-2Q_2)$$

- إيجاد المشتقات الجزئية الأولى لدالة لاجرانج ومساواتها بالصفر

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial Q_1}(Q_1,Q_2,\lambda)=0\\[2mm]\dfrac{\partial L}{\partial Q_2}(Q_1,Q_2,\lambda)=0\\[2mm]\dfrac{\partial L}{\partial \lambda}(Q_1,Q_2,\lambda)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{4}Q_1^{-\frac{3}{4}}Q_2^{\frac{3}{4}}-3\lambda=0.....(1)\\\frac{3}{4}Q_1^{\frac{1}{4}}Q_2^{-\frac{1}{4}}-2\lambda=0.....(2)\\80-3Q_1-2Q_2=0.....(3)\end{cases}$$

من المعادلتين (1) و (2) ، نستخرج علاقة تعبر عن λ ، أي

$$\begin{cases}(1) \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{12}Q_1^{-\frac{3}{4}}Q_2^{\frac{3}{4}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1')\\ (2) \Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{8}Q_1^{\frac{1}{4}}Q_2^{-\frac{1}{4}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2')\end{cases}$$

بالمساواة بين المعادلتين (1′) و (2′) ، نجد

$$\begin{aligned}(1') = (2') &\Leftrightarrow \tfrac{1}{12}Q_1^{-\frac{3}{4}}Q_2^{\frac{3}{4}} = \tfrac{3}{8}Q_1^{\frac{1}{4}}Q_2^{-\frac{1}{4}}\\ &\Leftrightarrow \frac{1}{12}\frac{Q_2^{\frac{3}{4}}}{Q_1^{\frac{3}{4}}} - \frac{3}{8}\frac{Q_1^{\frac{1}{4}}}{Q_2^{\frac{1}{4}}} = 0\\ &\Leftrightarrow \frac{2Q_2 - 9Q_1}{24Q_1^{\frac{3}{4}}Q_2^{\frac{1}{4}}} = 0\\ &\Leftrightarrow 2Q_2 - 9Q_1 = 0\\ &\Leftrightarrow Q_2 = \frac{9}{2}Q_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3')\end{aligned}$$

بالتعويض عن عبارة Q_2 في المعادلة (3) ، نجد

$$\begin{aligned}(3) &\Leftrightarrow 80 - 3Q_1 - 9Q_1 = 0\\ &\Leftrightarrow 80 - 12Q_1 = 0\\ &\Leftrightarrow Q_1 = \frac{20}{3}\end{aligned}$$

بالتعويض عن قيمة Q_1 في المعادلة (3′) ، نجد

$$(3') \Leftrightarrow Q_2 = \frac{9}{2}\left(\frac{20}{3}\right) = 30$$

بالتعويض عن قيمتي Q_1 و Q_2 في المعادلة (1′) ، نجد

$$\begin{aligned}(1') &\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{12}\left(\frac{20}{3}\right)^{-\frac{3}{4}}(30)^{\frac{3}{4}}\\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{12}\left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{3}{4}} \simeq 0.25\end{aligned}$$

ومنه $\left(\frac{20}{3};30\right)$ نقطة حرجة للدالة L من أجل $\lambda = 0.25$.

- إيجاد المشتقات الجزئية الثانية لدالة لاجرانج وتشكيل مصفوفة هيس

لدينا

$$\frac{\partial^2 L}{\partial Q_1^2}(Q_1,Q_2,\lambda) = -\tfrac{3}{16}Q_1^{-\frac{7}{4}}Q_2^{\frac{3}{4}} \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial Q_2 \partial Q_1}(Q_1,Q_2,\lambda) = \tfrac{3}{16}Q_1^{-\frac{3}{4}}Q_2^{-\frac{1}{4}} \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial Q_1}(Q_1,Q_2,\lambda) = -3$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial Q_1 \partial Q_2}(Q_1,Q_2,\lambda) = \tfrac{3}{16}Q_1^{-\frac{3}{4}}Q_2^{-\frac{1}{4}} \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial Q_2^2}(Q_1,Q_2,\lambda) = -\tfrac{3}{16}Q_1^{\frac{1}{4}}Q_2^{-\frac{5}{4}} \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial Q_2}(Q_1,Q_2,\lambda) = -2$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial Q_1 \partial \lambda}(Q_1,Q_2,\lambda) = -3 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial Q_2 \partial \lambda}(Q_1,Q_2,\lambda) = -2 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}(Q_1,Q_2,\lambda) = 0$$

ولدينا

$$H_L(Q_1,Q_2)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial Q_1^2}(Q_1,Q_2) & \frac{\partial^2 L}{\partial Q_2\partial Q_1}(Q_1,Q_2) & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\partial Q_1}(Q_1,Q_2) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial Q_1\partial Q_2}(Q_1,Q_2) & \frac{\partial^2 L}{\partial Q_2^2}(Q_1,Q_2) & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\partial Q_2}(Q_1,Q_2) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial Q_1\partial \lambda}(Q_1,Q_2) & \frac{\partial^2 L}{\partial Q_2\partial \lambda}(Q_1,Q_2) & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}(Q_1,Q_2) \end{pmatrix}$$

أي

$$H_L(Q_1,Q_2)=\begin{pmatrix} -\frac{3}{16}Q_1^{-\frac{7}{4}}Q_2^{\frac{3}{4}} & \frac{3}{16}Q_1^{-\frac{3}{4}}Q_2^{-\frac{1}{4}} & -3 \\ \frac{3}{16}Q_1^{-\frac{3}{4}}Q_2^{-\frac{1}{4}} & -\frac{3}{16}Q_1^{\frac{1}{4}}Q_2^{-\frac{5}{4}} & -2 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

ومنه

$$H_L\left(\frac{20}{3};30\right)\simeq\begin{pmatrix} -4.88 & 0.03 & -3 \\ 0.03 & -0.004 & -2 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

وعليه، باستعمال السطر الثالث للمصفوفة $H_L\left(\frac{20}{3};30\right)$، نجد

$$\begin{aligned}\det\left(H_L\left(\frac{20}{3};30\right)\right)&=-3\begin{vmatrix}0.03 & -3\\ -0.004 & -2\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}-4.88 & -3\\ 0.03 & -2\end{vmatrix}\\ &=-3\left[(0.03.-2)-(-0.004.-3)\right]+2\left[(-4.88.-2)-(0.03.-3)\right]\\ &=19.916>0\end{aligned}$$

ومنه $U\left(\frac{20}{3};30\right)=20.59$ قيمة حدية عظمى للدالة U عند النقطة الحرجة $\left(\frac{20}{3};30\right)$ من أجل $\lambda=0.25$، أي على المستهلك شراء ما يقارب 7 وحدات من السلعة الأولى و30 وحدة من السلعة الثانية لتحقيق أقصى منفعة وهي 20.59. نلاحظ أن $\lambda=0.25$، هذا يعني أن الزيادة في ثابت القيد من 80 إلى 81 يؤدي إلى الزيادة في دالة المنفعة U بمقدار 0.25 تقريبا.

تمرين 7-6. من الخبرة السابقة لإحدى المنشآت التجارية، تبين أن التكاليف الكلية لأحد المنتجات ترتبط بالدعاية حسب العلاقة التالية

$$TC=2T^2-6TI+10T+\frac{9}{2}I^2+10I+100 \qquad \text{وحدة نقدية}$$

حيث، T تكاليف الدعاية عن طريق التلفاز و I تكاليف الدعاية عبر الانترنت. إذا كانت التكاليف المخصصة للدعاية في هذه المنشأة هي 100 وحدة نقدية، فكم يجب أن تنفق المنشأة على الدعاية عن طريق التلفاز والانترنت لتحقيق اقل تكلفة ممكنة ؟

الحل. إيجاد حجم الإنفاق على الدعاية عن طريق التلفاز والانترنت لتخفيض التكاليف إلى أدنى حد ممكن. لدينا

- دالة الهدف

$$TC(T,I)=2T^2-6TI+10T+\frac{9}{2}I^2+10I+100$$

- دالة القيد

$$g(T,I)=T+I=100$$

- تحويل دالة القيد إلى دالة صفرية

$$100-T-I=0$$

- دالة لاجرانج

$$L(T,I,\lambda)=2T^2-6TI+10T+\frac{9}{2}I^2+10I+100+\lambda(100-T-I)$$

- إيجاد المشتقات الجزئية الأولى لدالة لاجرانج ومساواتها بالصفر

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial T}(T,I,\lambda)=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial I}(T,I,\lambda)=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}(T,I,\lambda)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4T-6I+10-\lambda=0.....(1)\\ 9I-6T+10-\lambda=0.....(2)\\ 100-T-I=0.....(3)\end{cases}$$

من المعادلتين (1) و (2) ، نستخرج علاقة تعبر عن λ ، أي

$$\begin{cases}(1)\Leftrightarrow\lambda=4T-6I+10.....(1')\\ (2)\Leftrightarrow\lambda=9I-6T+10.....(2')\end{cases}$$

بالمساواة بين المعادلتين $(1')$ و $(2')$ ، نجد

$$\begin{aligned}(1')=(2')&\Leftrightarrow 4T-6I+10=9I-6T+10\\ &\Leftrightarrow 10T=15I\\ &\Leftrightarrow T=\frac{3}{2}I.....(3')\end{aligned}$$

بالتعويض عن عبارة T في المعادلة (3) ، نجد

$$\begin{aligned}(3)&\Leftrightarrow 100-\frac{3}{2}I-I=0\\ &\Leftrightarrow 100-\frac{5}{2}I=0\\ &\Leftrightarrow I=40\end{aligned}$$

بالتعويض عن قيمة I في المعادلة $(3')$ ، نجد

$$(3')\Leftrightarrow T=\frac{3}{2}(40)=60$$

بالتعويض عن قيمتي T و I في المعادلة $(1')$ ، نجد

$$\begin{aligned}(1')&\Leftrightarrow\lambda=4(60)-6(40)+10\\ &\Leftrightarrow\lambda=10\end{aligned}$$

ومنه $(60;40)$ نقطة حرجة للدالة L من أجل $\lambda=10$.

- إيجاد المشتقات الجزئية الثانية لدالة لاجرانج وتشكيل مصفوفة هيس

لدينا

$$\frac{\partial^2 L}{\partial T^2}(T,I,\lambda)=4 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial I\partial T}(T,I,\lambda)=-6 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\partial T}(T,I,\lambda)=-1$$
$$\frac{\partial^2 L}{\partial T\partial I}(T,I,\lambda)=-6 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial I^2}(T,I,\lambda)=9 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\partial I}(T,I,\lambda)=-1$$
$$\frac{\partial^2 L}{\partial T\partial \lambda}(T,I,\lambda)=-1 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial I\partial \lambda}(T,I,\lambda)=-1 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}(T,I,\lambda)=0$$

ولدينا

$$H_L(T,I)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial T^2}(T,I) & \frac{\partial^2 L}{\partial I\partial T}(T,I) & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\partial T}(T,I) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial T\partial I}(T,I) & \frac{\partial^2 L}{\partial I^2}(T,I) & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\partial I}(T,I) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial T\partial \lambda}(T,I) & \frac{\partial^2 L}{\partial I\partial \lambda}(T,I) & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}(T,I) \end{pmatrix}$$

أي

$$H_L(T,I)=\begin{pmatrix} 4 & -6 & -1 \\ -6 & 9 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}=H_L(60;40)$$

وعليه، باستعمال السطر الثالث للمصفوفة $H_L(60;40)$، نجد

$$\begin{aligned}\det\left(H_L(60;40)\right)&=-\begin{vmatrix}-6 & -1\\ 9 & -1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}4 & -1\\ -6 & -1\end{vmatrix}\\ &=-\left[(-6.-1)-(9.-1)\right]+\left[(4.-1)-(-6.-1)\right]\\ &=-(6+9)+(-4-6)\\ &=-25<0\end{aligned}$$

ومنه وحدة نقدية $TC(60;40)=1100$ قيمة حدية صغرى للدالة TC عند النقطة الحرجة $(60;40)$ من أجل $\lambda=10$، أي على المنشأة الإنفاق على الدعاية عن طريق التلفاز والانترنت 60 وحدة نقدية و40 وحدة نقدية على الترتيب للحصول على أدنى تكلفة وهي 1100 وحدة نقدية. نلاحظ أن $\lambda=10$، هذا يعني أن النقصان في ثابت القيد من 100 إلى 99 يؤدي إلى النقصان في دالة التكاليف TC بمقدار 10 وحدات نقدية تقريبا.

تمرين 7-7. حدد القيمة القصوى لدالة الإنتاج التالية والتي تسمى دالة كوب-دوجلاس[1]

$$Q(K,L)=50K^{0.2}L^{0.8}$$

علما أن سعر رأس المال $P_K=10$، سعر العمل $P_L=20$ وقيد الميزانية هو 300 وحدة نقدية.

---

[1] دالة كوب-دوجلاس (Cobb-Douglas) هي من دوال الإنتاج المعروفة التي تحدد العلاقة بين الإنتاج والعوامل الداخلة في العملية الإنتاجية ويعبر عنها بالصيغة التالية

$$Q(K,L)=AK^{\alpha}L^{\beta}$$

حيث Q الإنتاج، A كمية ثابتة موجبة، K كمية عنصر رأس المال، L كمية عنصر العمل، α نسبة الزيادة في الإنتاج عندما يزداد عنصر رأس المال بنسبة 1%، β نسبة الزيادة في الإنتاج عندما يزداد عنصر العمل بنسبة 1%، ينظر: عقيل جاسم عبد الله، إبراهيم غبريال. *مقدمة في الاقتصاد الرياضي. ط 2.* دار مجدلاوي للنشر، عمان- الأردن، 1999، ص. 292.

الحل. لدينا

- دالة الهدف

$$Q(K,L)=50K^{0.2}L^{0.8}$$

- دالة القيد

$$g(K,L)=10K+20L=300$$

- تحويل دالة القيد إلى دالة صفرية

$$300-10K-20L=0$$

- دالة لاجرانج

$$L(K,L,\lambda)=50K^{0.2}L^{0.8}+\lambda(300-10K-20L)$$

- إيجاد المشتقات الجزئية الأولى لدالة لاجرانج ومساواتها بالصفر

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial K}(K,L,\lambda)=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial L}(K,L,\lambda)=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}(K,L,\lambda)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}10K^{-0.8}L^{0.8}-10\lambda=0.....(1)\\ 40K^{0.2}L^{-0.2}-20\lambda=0.....(2)\\ 300-10K-20L=0.....(3)\end{cases}$$

من المعادلتين (1) و (2) ، نستخرج علاقة تعبر عن λ ، أي

$$\begin{cases}(1)\Leftrightarrow\lambda=K^{-0.8}L^{0.8}.....(1')\\ (2)\Leftrightarrow\lambda=2K^{0.2}L^{-0.2}.....(2')\end{cases}$$

بالمساواة بين المعادلتين $(1')$ و $(2')$، نجد

$$(1')=(2')\Leftrightarrow K^{-0.8}L^{0.8}=2K^{0.2}L^{-0.2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{L^{0.8}}{K^{0.8}}-2\frac{K^{0.2}}{L^{0.2}}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{L-2K}{K^{0.8}L^{0.2}}=0$$

$$\Leftrightarrow L-2K=0$$

$$\Leftrightarrow L=2K.....(3')$$

بالتعويض عن عبارة L في المعادلة (3) ، نجد

$$(3)\Leftrightarrow 300-10K-20(2K)=0$$

$$\Leftrightarrow 300-50K=0$$

$$\Leftrightarrow K=6$$

بالتعويض عن قيمة K في المعادلة $(3')$ ، نجد

$$(3')\Leftrightarrow L=2(6)=12$$

بالتعويض عن قيمتي K و L في المعادلة $(1')$، نجد

$$(1')\Leftrightarrow\lambda=(6)^{-0.8}(12)^{0.8}\simeq 1.74$$

ومنه $(6;12)$ نقطة حرجة للدالة L من أجل $\lambda\simeq 1.74$.

- إيجاد المشتقات الجزئية الثانية لدالة لاجرانج وتشكيل مصفوفة هيس

لدينا

$$\frac{\partial^2 L}{\partial K^2}(K,L,\lambda)=-8K^{-1.8}L^{0.8} \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial L\partial K}(K,L,\lambda)=8K^{-0.8}L^{-0.2} \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\partial K}(K,L,\lambda)=-10$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial K\partial L}(K,L,\lambda)=8K^{-0.8}L^{-0.2} \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial L^2}(K,L,\lambda)=-8K^{0.2}L^{-1.2} \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\partial L}(K,L,\lambda)=-20$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial K\partial \lambda}(K,L,\lambda)=-10 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial L\partial \lambda}(K,L,\lambda)=-20 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}(K,L,\lambda)=0$$

ولدينا

$$H_L(K,L)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial K^2}(K,L) & \frac{\partial^2 L}{\partial L\partial K}(K,L) & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\partial K}(K,L) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial K\partial L}(K,L) & \frac{\partial^2 L}{\partial L^2}(K,L) & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda\partial L}(K,L) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial K\partial \lambda}(K,L) & \frac{\partial^2 L}{\partial L\partial \lambda}(K,L) & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}(K,L) \end{pmatrix}$$

أي

$$H_L(K,L)=\begin{pmatrix} -8K^{-1.8}L^{0.8} & 8K^{-0.8}L^{-0.2} & -10 \\ 8K^{-0.8}L^{-0.2} & -8K^{0.2}L^{-1.2} & -20 \\ -10 & -20 & 0 \end{pmatrix}$$

ومنه

$$H_L(6;12)\simeq\begin{pmatrix} -2.32 & 1.16 & -10 \\ 1.16 & -0.58 & -20 \\ -10 & -20 & 0 \end{pmatrix}$$

وعليه، باستعمال السطر الثالث للمصفوفة $H_L(6;12)$، نجد

$$\begin{aligned}\det\left(H_L(6;12)\right)&=-10\begin{vmatrix}1.16 & -10\\ -0.58 & -20\end{vmatrix}+20\begin{vmatrix}-2.32 & -10\\ 1.16 & -20\end{vmatrix}\\ &=-10\left[(1.16.-20)-(-0.58.-10)\right]+20\left[(-2.32.-20)-(1.16.-10)\right]\\ &=1450>0\end{aligned}$$

ومنه $Q(6;12)=522.33$ قيمة حدية عظمى للدالة Q عند النقطة الحرجة $(6;12)$ من أجل $\lambda\simeq 1.74$، أي كمية عنصر رأس المال هي 6 وحدات وكمية عنصر العمل هي 12 وحدة لتحقيق أقصى قيمة لدالة الإنتاج وهي 522.33. نلاحظ أن $\lambda\simeq 1.74$، هذا يعني أن الزيادة في ثابت القيد من 300 إلى 301 يؤدي إلى الزيادة في دالة الإنتاج Q بمقدار 1.74 تقريبا.