للدوال الأسية واللوغاريتمية تطبيقات عدة في الاقتصاد، فهي تستخدم لنمذجة بعض الظواهر التي تدرس حالات النمو والانكماش لمتغير اقتصادي، فإذا كان النمو بطيئا، نستخدم الدالة اللوغاريتمية، أما إن كان سريعا جدا فنلجأ للدالة الأسية. كلا الدالتين لهما قوانين وقواعد بسيطة ومتشابهة فيما بينها.

1- الدالة الأسية

تعريف 3-1. *تسمى الدالة التي تكتب بالصيغة*

$$y = f(x) = a^x = \exp_a(x)$$

بالدالة الأسية، حيث الأساس الثابت a عدد حقيقي، $a > 0$ و $a \neq 1$ والأس x متغير.[1]

تتميز الدوال الأسية بالخصائص التالية

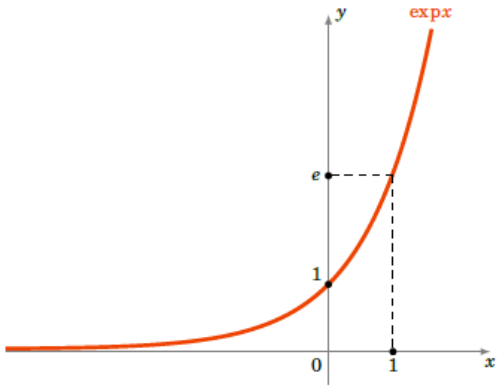
- *مجموعة تعريف f هي R وتأخذ صورها في R_+^*.*
- *إذا كان $a > 1$ فان الدالة متزايدة وإذا كان $0 < a < 1$ فان الدالة متناقصة.*
- *عند $x = 0$ فان $f(x) = 1$ مستقلة عن الأساس.*[2]

- الدالة الأسية الطبيعية

تعريف 3-2. *الدوال الأسية التي أساسها العدد غير النسبي $e \simeq 2,71828...$ تسمى الدوال الأسية الطبيعية وتكتب*

$$f(x) = e^x = \exp_e(x)$$ [3]

وهي دوال مستمرة، موجبة تماما ومتزايدة تماما على R، بحيث $e^0 = 1$ و $e^1 = e$ والشكل التالي يوضح ذلك



شكل 3-1- منحنى الدالة الأسية الطبيعية [4]

-خواص الدالة الأسية الطبيعية

نظرية 3-1

1) $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ و $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

---

[1] ثائر فيصل شاهر، سامر محمد عكور. *الرياضيات في العلوم المالية والإدارية والاقتصادية. ط 2.* دار الحامد للنشر والتوزيع، عمان- الأردن، 2010. تعريف 5-1، ص. 217.

[2] Edward T Dowling. *Introduction to mathematical economics. 3rd E.* The McGraw-Hill Companies, New York, 2001, p. 146.

[3] Ibid, p. 149.

[4] Stéphane Rossignol. *Mathématiques en économie- gestion.* Dunod, Paris, 2015. Propositions 5.12 et 5.13, p. 125.

2) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$

3) $\lim_{x\to-\infty}xe^x=0$

4) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^\alpha}=+\infty,\quad \alpha\in Q_+^*$

5) $\lim_{x\to-\infty}x^\alpha e^x=0,\quad \alpha\in Q_+^*$

6) $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$ (1)

نظرية 3-2. *ليكن a و b عددين حقيقيين، لدينا*

1) $e^{a+b}=e^a.e^b$

2) $e^{-a}=\frac{1}{e^a}$

3) $e^{a-b}=\frac{e^a}{e^b}$

4) $e^{qa}=\left(e^a\right)^q,\quad q\in Q$ (2)

نظرية 3-3

1) $\forall x\in R:\left(e^x\right)'=e^x$ (3)

2) u *قابلة للاشتقاق*، $\left(e^{u(x)}\right)'=u'(x)e^{u(x)}$ (4)

2- الدالة اللوغاريتمية

تعريف 3-3. *تسمى الدالة العكسية للدالة الأسية $y=a^x$ التي تأخذ الصورة $x=a^y$ بالدالة اللوغاريتمية ونكتب*

$$y=f(x)=\log_a x,\quad a>0,\quad a\neq1$$

ونقرأ " لوغاريتم x في الأساس a يساوي y"

- *إذا كانت قيمة الأساس $a=10$ فالدالة تسمى بدالة اللوغاريتم العشري ونرمز لها ب $f(x)=\log_{10}x$ أو اختصارا ب $f(x)=\log x$.*
- *أما إذا كانت قيمة الأساس $a=e$ فتسمى الدالة باللوغاريتم الطبيعي أو النيبيري ونرمز لها ب $f(x)=\log_e x$ أو اختصارا ب $f(x)=\ln x$.* (5)

وتتميز الدوال اللوغاريتمية بالخصائص التالية

- *مجموعة تعريف f هي R_+^* وتأخذ صورها في R.*
- *إذا كان $a>1$ فان الدالة متزايدة وإذا كان $0<a<1$ فان الدالة متناقصة.*
- *عند $x=1$ فان $f(x)=0$ مستقلة عن الأساس.* (6)

---

(1) Stéphane Rossignol. Op. Cit. Propositions 5.16 et 5.17, Théorème, pp. 128-129.

(2) Ibid. Proposition 5.14, p. 126.

(3) Ibid. Proposition 5.16, p. 128.

(4) Ibid. Proposition 5.18, p. 129.

(5) ثائر فيصل شاهر، سامر محمد عكور. المرجع السابق. تعريفان 5-2 و 5-3، ص ص. 228-229.

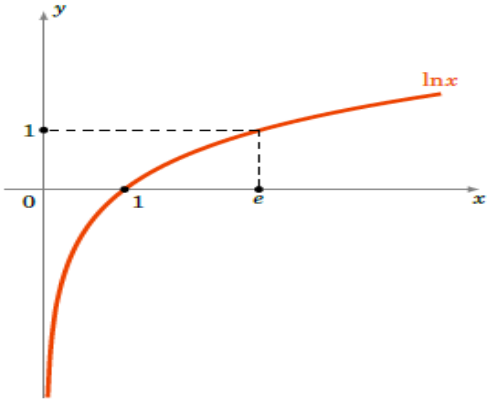
(6) Edward T Dowling. Idem, p. 147.

-الدالة اللوغاريتمية الطبيعية

تعريف 3-4. *الدوال اللوغاريتمية التي أساسها العدد غير النسبي* $e \simeq 2.71828...$ *تسمى الدوال اللوغاريتمية الطبيعية وتكتب*

$$f(x) = \log_e x = \ln x \quad (1)$$

وهي دوال مستمرة متزايدة تماما على $]0,+\infty[$ *بحيث* $\ln(1) = 0$ *و* $\ln(e) = 1$ *والشكل التالي يوضح ذلك.*



شكل 3-2- منحنى الدالة اللوغاريتمية الطبيعية *(2)*

-خواص الدالة اللوغاريتمية الطبيعية

نظرية 3-4

1) $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ و $\lim_{x\geq 0} \ln x = -\infty$

2) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

3) $\lim_{x\geq 0} x \ln x = 0$

4) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(x^{\alpha}\right)}{x^{\beta}} = 0, \quad \alpha, \beta \in Q_+^*$

5) $\lim_{x\geq 0} x^{\beta} \ln\left(x^{\alpha}\right) = 0, \quad \alpha, \beta \in Q_+^*$ *(3)*

نظرية 3-5. *ليكن* a *و* b *عددين حقيقيين موجبين تماما، لدينا*

1) $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

2) $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$

3) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

4) $\ln\left(a^n\right) = n \ln a, \quad n \in Z$

5) $\ln\left(a^q\right) = q \ln a, \quad q \in Q$ *(4)*

---

(1) Edward T Dowling. Idem, p. 149.
(2) Stéphane Rossignol. Op. Cit. Proposition 5.8, p. 121.
(3) Ibid. Proposition 5.8, Théorème, pp. 121-123.
(4) Ibid. Proposition 5.7, p. 120.

نظرية 3-6

1) $\forall x\in\,]0,+\infty[\,:(\ln x)'=\frac{1}{x}$ [1]

2) u *قابلة للاشتقاق* $\left[\ln(u(x))\right]'=\frac{u'(x)}{u(x)}$, [2]

3- حل معادلات الدوال الأسية واللوغاريتمية

لحل معادلات الدوال الأسية واللوغاريتمية، نستخدم خواص الدالتين إضافة لكون إحداهما معاكسة للأخرى، أي

$$\ln\left(e^{x}\right)=x,\quad \forall x\in R \quad \text{و} \quad e^{\ln x}=x,\quad \forall x>0$$ [3]

وكذا الخاصية

$$\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a},\quad x>0,\ a>0,\ a\neq 1$$ [4]

4- تمارين

تمرين 3-1. أوجد مشتقات الدوال التالية

e^{4x-1} $\qquad$ $\ln\left(x^4+1\right)$ $\qquad$ x^2e^x

$\frac{x}{\ln x}$ $\qquad$ $\sqrt{e^{2x}}$ $\qquad$ $\frac{1}{e^{-7x}}$

الحل. حساب مشتقات الدوال التالية

$$\left(e^{4x-1}\right)'=4e^{4x-1}$$

$$\left(\ln\left(x^4+1\right)\right)'=\frac{4x^3}{x^4+1}$$

$$\left(x^2e^x\right)'=2xe^x+x^2e^x=\left(x^2+2x\right)e^x$$

$$\left(\frac{x}{\ln x}\right)'=\frac{\ln x-x\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}$$

$$\left(\sqrt{e^{2x}}\right)'=\left(e^x\right)'=e^x$$

$$\left(\frac{1}{e^{-7x}}\right)'=\left(e^{7x}\right)'=7e^{7x}$$

تمرين 3-2. أحسب النهايات التالية

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{3x}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-e^{2x}}{4x}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x^3}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{5x}}{\sqrt{x}}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\geq0} x+\ln x$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\geq0} x^2\ln x$

---

[1] Stéphane Rossignol. Op. Cit. Proposition 5.6, p. 119.
[2] Ibid. Proposition 5.11, p. 124.
[3] Ibid. Proposition 5.13, p. 125.
[4] Ibid. Définition 5.3, p. 124.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(3-x)}{3-x} \qquad \lim_{x\geq 0}\sqrt{x^3}\ln\left(x^7\right) \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{x^4}$$

الحل. حساب النهايات التالية

1) حالة عدم التعيين $\lim_{x\to-\infty} xe^{3x} = -\infty.0$. لكن نعلم أن $\lim_{x\to-\infty} xe^{x} = 0$ ومنه

$$\lim_{x\to-\infty} xe^{3x} = \lim_{x\to-\infty} e^{2x}\left(xe^{x}\right) = 0.0 = 0$$

2) حالة عدم التعيين $\lim_{x\to+\infty}\frac{-e^{2x}}{4x} = \frac{-\infty}{+\infty}$. لكن نعلم أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x} = +\infty$ ومنه

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-e^{2x}}{4x} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{e^{x}}{4}\left(\frac{e^{x}}{x}\right) = -\infty.+\infty = -\infty$$

3) حالة عدم التعيين $\lim_{x\to0}\frac{e^{x}-1}{x^3} = \frac{0}{0}$. لكن نعلم أن $\lim_{x\to0}\frac{e^{x}-1}{x} = 1$ ومنه

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x}-1}{x^3} = \lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}.\frac{e^{x}-1}{x} = +\infty.1 = +\infty$$

4) حالة عدم التعيين $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{5x}}{\sqrt{x}} = \frac{+\infty}{+\infty}$. لكن نعلم أن $\alpha\in Q_+^*$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x^{\alpha}} = +\infty$ ومنه

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{5x}}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{5x}}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^{4x}\left(\frac{e^{x}}{x^{\frac{1}{2}}}\right) = +\infty.+\infty = +\infty$$

5) $\lim_{x\geq0} x+\ln x = 0-\infty = -\infty$

6) حالة عدم التعيين $\lim_{x\geq0} x^2\ln x = 0.-\infty$. لكن نعلم أن $\lim_{x\geq0} x\ln x = 0$ ومنه

$$\lim_{x\geq0} x^2\ln x = \lim_{x\geq0} x\left(x\ln x\right) = 0.0 = 0$$

7) حالة عدم التعيين $\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(3-x)}{3-x} = \frac{+\infty}{+\infty}$. بوضع $y = 3-x$ ونعلم أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$ ومنه

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(3-x)}{3-x} = \lim_{y\to+\infty}\frac{\ln y}{y} = 0$$

8) حالة عدم التعيين $\lim_{x\geq0}\sqrt{x^3}\ln\left(x^7\right) = 0.-\infty$. لكن نعلم أن $\alpha,\beta\in Q_+^*$, $\lim_{x\geq0} x^{\beta}\ln\left(x^{\alpha}\right) = 0$ ومنه

$$\lim_{x\geq0}\sqrt{x^3}\ln\left(x^7\right) = \lim_{x\geq0} x^{\frac{1}{3}}\ln\left(x^7\right) = 0$$

9) حالة عدم التعيين $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{x^4} = \frac{+\infty}{+\infty}$. لكن نعلم أن $\alpha,\beta\in Q_+^*$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^{\alpha}\right)}{x^{\beta}} = 0$ ومنه

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{x^4} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^{\frac{1}{2}}\right)}{x^4} = 0$$

تمرين 3-3. حل في R المعادلات والمتراجحات التالية

$$e^{x+1}+5=0 \qquad e^{2x}+2e^{x}=3 \qquad \ln x+\ln(2x-1)=0$$

$$e^{x-4}\geq 3 \qquad \ln x+\ln(2x-1)<0$$

الحل. حل المعادلات والمتراجحات التالية في R

1) $e^{x+1}+5=0 \Leftrightarrow e^{x+1}=-5$ بما أن $\forall x\in R: e^{x}>0$ ، فان $S=\varnothing$.

2) $e^{2x}+2e^{x}=3\Leftrightarrow e^{2x}+2e^{x}-3=0.....(1)$

نضع $y=e^{x}$ ومنه

$$\begin{aligned}(1)&\Leftrightarrow y^{2}+2y-3=0\\&\Leftrightarrow (y-1)(y+3)=0\\&\Leftrightarrow \begin{cases}y-1=0\\y+3=0\end{cases}\\&\Leftrightarrow \begin{cases}y=1\\y=-3\end{cases}\end{aligned}$$

وعليه

$$\begin{cases}e^{x}=1\\e^{x}=-3(\forall x\in R:e^{x}>0 \text{ لان مـرفوض حـل})\end{cases}\Leftrightarrow e^{x}=1\Leftrightarrow x=\ln(1)=0$$

إذا $S=\{0\}$.

3) $\ln x+\ln(2x-1)=0.....(2)$

الدالة $\ln x$ معرفة على $]0,+\infty[$ والدالة $\ln(2x-1)$ معرفة على $]\frac{1}{2},+\infty[$ (لأن $\ln(2x-1)$ معرفة $\Leftrightarrow x>\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2x-1>0$) وعليه نحل المعادلة (2) في تقاطع مجموعتي تعريف الدالتين السابقتين، أي $]0,+\infty[\cap]\frac{1}{2},+\infty[=]\frac{1}{2},+\infty[$

وعليه نحل المعادلة (2) في المجال $]\frac{1}{2},+\infty[$ ومنه

$$\begin{aligned}(2)&\Leftrightarrow \ln\left[x(2x-1)\right]=0\\&\Leftrightarrow x(2x-1)=1\\&\Leftrightarrow 2x^{2}-x-1=0\\&\Leftrightarrow (x-1)(x+\tfrac{1}{2})=0\\&\Leftrightarrow \begin{cases}x-1=0\\x+\frac{1}{2}=0\end{cases}\\&\Leftrightarrow \begin{cases}x=1\in\ ]\frac{1}{2};+\infty[\\x=-\frac{1}{2}\notin\ ]\frac{1}{2};+\infty[\end{cases}\end{aligned}$$

وعليه $S=\{1\}$.

4) $e^{x-4}\geq 3$ بما أن الدالة اللوغاريتمية الطبيعية متزايدة تماما، فان

$$\begin{aligned}e^{x-4}\geq 3&\Leftrightarrow \ln\left(e^{x-4}\right)\geq \ln(3)\\&\Leftrightarrow x-4\geq \ln(3)\\&\Leftrightarrow x\geq \ln(3)+4\end{aligned}$$

إذا $S=\left[\ln(3)+4,+\infty\right[$.

5) $\ln x+\ln(2x-1)<0.....(3)$

لحل المتراجحة (3)، نحل أولا المعادلة $\ln x+\ln(2x-1)=0.....(4)$

حسب المثال (3) السابق، المعادلة (4) تُحل في المجال $]\frac{1}{2},+\infty[$ ولها حلان هما $x=1$ (حل مقبول) و $x=-\frac{1}{2}$ (حل مرفوض) وحسب إشارة الدالة $2x^2-x-1$، فان $\ln x+\ln(2x-1)\geq 0$، إذا كان $x\in[1,+\infty[$ و $\ln x+\ln(2x-1)<0$، إذا كان $x\in]\frac{1}{2};1[$.

إذا $S=]\frac{1}{2};1[$.