الحساب التفاضلي أو الاشتقاق من المفاهيم الرياضية الهامة التي تستخدم بشكل واسع في كثير من المجالات منها الإدارية والاقتصادية. يعرف تطبيق الاشتقاق في الاقتصاد بالحساب الحدي ومثال ذلك، أن مشتق التكلفة الكلية يسمى التكلفة الحدية.

1- قابلية اشتقاق دالة

1-1- قابلية اشتقاق دالة عند نقطة

تعريف 4-1. *لتكن f دالة معرفة على جوار نقطة $a\in R$. نقول عن f أنها قابلة للاشتقاق عند a، إذا كانت*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

موجودة ومنتهية وتسمى العدد المشتق لـ f عند a[1] *ويرمز له بأحد الرموز*

$$f'(a)\qquad \frac{df}{dx}(a)\qquad \frac{d}{dx}[f(a)]$$

ونكتب

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

أو بعبارة أخرى

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$ [2]

تعريف 4-2

- *لتكن f دالة معرفة على مجال $]a-\alpha,a]$ بحيث $\alpha>0$. نقول أن قابلة للاشتقاق عن يسار a إذا كان*

$$\lim_{x\leq a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\beta$$

ويسمى العدد الحقيقي β بالعدد المشتق لـ f عن يسار a ونرمز له بـ $f'_g(a)$ أو $f'_-(a)$.

- *ومن أجل f معرفة على مجال $[a,a+\alpha[$ بحيث $\alpha>0$. نقول أن قابلة للاشتقاق عن يمين a إذا كان*

$$\lim_{x\geq a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\gamma$$

ويسمى العدد الحقيقي γ بالعدد المشتق لـ f عن يمين a ونرمز له بـ $f'_d(a)$ أو $f'_+(a)$.[3]

نظرية 4-1. *نقول أن f قابلة للاشتقاق عند النقطة a، إذا وفقط إذا كانت قابلة للاشتقاق عن يمين وعن يسار a وكان*

$$f'_d(a)=f'_g(a)$$ [4]

[1] Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca . Op. Cit. Définition 1, pp. 111-112.
[2] Edward T Dowling. Idem, p. 36.

[3] Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca . Op. Cit. Définition 3, pp. 113-114.
[4] Ibid. Proposition 2, p. 114.

1-2- قابلية اشتقاق دالة على مجال

1-2-1- قابلية اشتقاق دالة على مجال مفتوح

تعريف 4-3. *لتكن f دالة معرفة على مجال (أو اتحاد مجالات) مفتوح I من R. نقول أن f قابلة للاشتقاق على I، إذا كانت قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من I.*[1]

1-2-2- قابلية اشتقاق دالة على مجال مغلق

تعريف 4-4

- *نقول عن دالة f أنها قابلة للاشتقاق على $[a,b]$، إذا كانت قابلة للاشتقاق على $]a,b[$ وقابلة للاشتقاق عن يمين a وعن يسار b.*
- *نقول عن دالة f أنها قابلة للاشتقاق على $[a,+\infty[$، إذا كانت قابلة للاشتقاق على $]a,+\infty[$ وقابلة للاشتقاق عن يمين a.*
- *نقول عن دالة f أنها قابلة للاشتقاق على $]-\infty,b]$، إذا كانت قابلة للاشتقاق على $]-\infty,b[$ وقابلة للاشتقاق عن يسار b.*[2]

2- الدالة المشتقة

تعريف 4-5. *إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I، نعرف دالتها المشتقة f' ب*

$$\begin{aligned} f' &: I \to R \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

ونسميها اختصارا مشتقة f عوضا عن الدالة المشتقة ل f ويرمز لها بأحد الرموز

$$f' \qquad \frac{df}{dx} \qquad \frac{d}{dx}[f(x)] \qquad D_x[f(x)]$$ [3]

تعريف 4-6

- *إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من R وكانت دالتها المشتقة f' قابلة للاشتقاق هي الأخرى على I، فإننا نقول أن f قابلة للاشتقاق مرتين على I ونرمز ب f'' للمشتقة الثانية أو مشتقة f من الرتبة 2.*[4]
- *وتعرف بصفة عامة مشتقة f من الرتبة n إذا كانت موجودة ونرمز لها ب $f^{(n)}$ أو $\frac{d^n f}{dx^n}$، بعلاقة تراجعية*

$$f^{(1)} = f', \quad f^{(2)} = f'', \quad f^{(3)} = f''', \dots, f^{(n)} = \left[f^{(n-1)}\right]', \quad n \in N^*$$

مع $f^{(0)} = f$.[5]

---

[1] غوثي بوكلي حسن. المرجع السابق. تعريف 1، ص. 231.

[2] Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca . Op. Cit. Définition 5, p. 115.

[3] Ibid. Définition 6, p. 115.

[4] غوثي بوكلي حسن. المرجع السابق. تعريف 2، ص ص. 234-235.

[5] Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca . Op. Cit. Définition 8, p. 116.

2-1- عمليات على الدوال القابلة للاشتقاق

نظرية 4-2. *لتكن f و g دالتين قابلتين للاشتقاق عند نقطة a. الدوال التالية قابلة للاشتقاق عند a ومشتقاتها كالآتي.*

1) $\forall \alpha,\beta \in R : (\alpha f+\beta g)'(a)=\alpha f'(a)+\beta g'(a)$

2) $(f.g)'(a)=f'(a).g(a)+f(a).g'(a)$

3) $(f(a)\neq 0)$ $\quad \left(\frac{1}{f}\right)'(a)=-\frac{f'(a)}{[f(a)]^2}$

4) $(g(a)\neq 0)$ $\quad \left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\frac{f'(a).g(a)-f(a).g'(a)}{[g(a)]^2}$

5) $[f^n(a)]'=nf^{n-1}(a).f'(a)$

6) $(f^{n+1}(a)\neq 0,\ f^n(a)\neq 0)$ $\quad \left(\frac{1}{f^n}\right)'(a)=-\frac{nf'(a)}{f^{n+1}(a)}$ *(بتصرف).* (1)

7) $(g\circ f)'(a)=g'(f(a)).f'(a)$

8) $(b=f(a))$ $\quad (f^{-1})'(a)=\frac{1}{f'\circ f^{-1}(b)}$ (2)

2-2- مشتقات الدوال المألوفة

الجدول التالي يمثل مشتقات بعض الدوال المألوفة.

$f(x)$	$f'(x)$
$k / k\in R$	0
x	1
kx	k
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x

(1) Edward T Dowling. Idem, pp. 38-39.
(2) Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit. Propositions 5 et 6, pp. 117-118.

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

جدول 4-1- مشتقات الدوال المألوفة [1]

3- تطبيقات الاشتقاق

3-1- قاعدة لوبيتال (L'Hôpital's Rule)

نظرية 4-3. *لتكن f و g دالتين مستمرتين وقابلتين للاشتقاق على مجال مفتوح $I \subset R$، $a \in I$ و $g(x) \neq 0$ من أجل $x \neq a$.*

إذا كان $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ *أو* $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$ *وكان* $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda$ *فان*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda$$ [2]

ملاحظة 4-1. يمكن تطبيق قاعدة لوبيتال في الحالات التالية: $a = \pm\infty$ و $\lambda = \pm\infty$، كما يمكن تطبيقها أكثر من مرة لإزالة حالة عدم التعيين.[3]

3-2- القيم الحدية لدالة (Extreme values of function)

نظرية 4-4. *لتكن f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على مجال I من R و $a \in I$.*

- *إذا كان $f'(a) = 0$ و $f''(a) > 0$ فان f تقبل قيمة حدية محلية صغرى $f(a)$ عند a.*
- *إذا كان $f'(a) = 0$ و $f''(a) < 0$ فان f تقبل قيمة حدية محلية عظمى $f(a)$ عند a.*
- *إذا كان $f'(a) = 0$ و $f''(a) = 0$ فلا يمكن استنتاج قيم حدية ل f.* [4]

3-3- الحساب الحدي في الاقتصاد

الحساب الحدي في الاقتصاد هو نسبة التغير في متغير بالنسبة لتغير طفيف في متغير آخر، فمثلا، تعرف التكلفة الحدية على أنها التغير في التكلفة الكلية الناجم عن إنتاج وحدة واحدة إضافية وللتعرف أكثر على تطبيقات الاشتقاق في الاقتصاد، نلخص بعض المصطلحات والقوانين الاقتصادية في الجدول التالي.

---

(1) Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit, p. 119.
(2) Ibid. Proposition 9, p. 125.
(3) Ibid, pp. 125-126.
(4) Edward T Dowling. Idem, p. 60.

القانون	الرمز	المصطلح
−	TC	التكلفة الكلية (Total Cost)
$TR = PQ$ حيث P السعر و Q الكمية	TR	الإيراد الكلي (Total Revenue)
$TP = TR - TC$	TP	الربح الكلي (Total Profit)
$MC = \dfrac{dTC}{dQ}$	MC	التكلفة الحدية (Marginal Cost)
$MR = \dfrac{dTR}{dQ}$	MR	الإيراد الحدي (Marginal Revenue)
$MP = \dfrac{dTP}{dQ}$ أو $MP = MR - MC$	MP	الربح الحدي (Marginal Profit)

جدول 4-2- رموز وقوانين الحساب الحدي في الاقتصاد (بتصرف) [1]

4- تمارين

تمرين 4-1. أوجد مشتقات الدوال التالية

$$2x^3 + x^4 - 5 \qquad \frac{3}{5x+1} + \frac{1}{x} - 6\sqrt{x} \qquad (4x-1)(x^2+7)$$

$$\frac{x^2}{x^3-7} \qquad (5x+2)^4 \qquad \frac{1}{(x^2+3)^5}$$

$$\sqrt{5x^3 - x} \qquad \ln(x^2-6) \qquad e^{3x-4}$$

الحل. إيجاد مشتقات الدوال التالية

$$\left(2x^3 + x^4 - 5\right)' = 6x^2 + 4x^3$$

$$\left(\frac{3}{5x+1} + \frac{1}{x} - 6\sqrt{x}\right)' = 3\frac{-5}{(5x+1)^2} - \frac{1}{x^2} - 6\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{-15}{(5x+1)^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{3}{\sqrt{x}}$$

$$\left[(4x-1)(x^2+7)\right]' = 4(x^2+7) + (2x)(4x-1) = 12x^2 - 2x + 28$$

$$\left(\frac{x^2}{x^3-7}\right)' = \frac{2x(x^3-7) - 3x^2(x^2)}{(x^3-7)^2} = \frac{-x^4 - 14x}{(x^3-7)^2}$$

$$\left((5x+2)^4\right)' = 4(5)(5x+2)^3 = 20(5x+2)^3$$

$$\left(\frac{1}{(x^2+3)^5}\right)' = -\frac{5(2x)}{(x^2+3)^6} = \frac{-10x}{(x^2+3)^6}$$

$$\left(\sqrt{5x^3 - x}\right)' = \frac{15x^2}{2\sqrt{5x^3 - x}}$$

---

[1] فتحي خليل حمدان. المرجع السابق، ص.195.

$$\left(\ln\left(x^2-6\right)\right)'=\frac{2x}{x^2-6}$$

$$\left(e^{3x-4}\right)'=3e^{3x-4}$$

تمرين 4−2. أوجد المشتقات المتتابعة من الرتبة n للدوال التالية

$$f(x)=3x^5-2x+7 \qquad g(x)=\frac{1}{x};\quad x\neq 0$$

$$h(x)=\left(2x-1\right)^4 \qquad j(x)=e^x$$

الحل. إيجاد المشتقات المتتابعة من الرتبة n للدوال التالية

1) $f(x)=3x^5-2x+7$

$$f^{(0)}(x)=f(x) \qquad f^{(1)}(x)=15x^4-2$$

$$f^{(2)}(x)=60x^3 \qquad f^{(3)}(x)=180x^2$$

$$f^{(4)}(x)=360x \qquad f^{(5)}(x)=360$$

$$f^{(6)}(x)=0 \qquad \forall n\geq 6: f^{(n)}(x)=0$$

2) $g(x)=\frac{1}{x}=x^{-1};\quad x\neq 0$

$$g^{(0)}(x)=g(x)$$

$$g^{(1)}(x)=-x^{-2}=\left(-1\right)^1.1!x^{-(1+1)}$$

$$g^{(2)}(x)=2x^{-3}=\left(-1\right)^2.2!x^{-(2+1)}$$

$$g^{(3)}(x)=-6x^{-4}=\left(-1\right)^3.3!x^{-(3+1)}$$

$$g^{(4)}(x)=24x^{-5}=\left(-1\right)^4.4!x^{-(4+1)}$$

$$\vdots$$

$$g^{(n)}(x)=\left(-1\right)^n.n!x^{-(n+1)}$$

إذا $\forall n\geq 1: g^{(n)}(x)=\frac{n!\left(-1\right)^n}{x^{n+1}}$

3) $h(x)=\left(2x-1\right)^4$

$$h^{(0)}(x)=h(x) \qquad h^{(1)}(x)=8\left(2x-1\right)^3$$

$$h^{(2)}(x)=24\left(2x-1\right)^2 \qquad h^{(3)}(x)=48\left(2x-1\right)$$

$$h^{(4)}(x)=96 \qquad h^{(5)}(x)=0$$

$$\forall n\geq 5: h^{(n)}(x)=0$$

4) $j(x)=e^x$

$$j^{(0)}(x)=j(x)$$

$$j^{(1)}(x)=e^x=j^{(2)}(x)=\ldots=j^{(n)}(x)$$

إذا $\forall n\geq 0: j^{(n)}(x)=e^x$

تمرين 4−3. باستعمال قاعدة لوبيتال، أحسب النهايات التالية

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}+x}{x^2} \qquad \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^5-1} \qquad \lim_{x\geq 0} x\ln x \qquad \lim_{x\to-\infty} xe^x$$

الحل. حساب النهايات التالية باستعمال قاعدة لوبيتال

1) حالة عدم التعيين $\frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}+x}{x^2}$. بتطبيق قاعدة لوبيتال مرتين، نجد

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}+x}{x^2} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{2x}+1}{2x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{4e^{2x}}{2}\\ &= \lim_{x\to+\infty}2e^{2x} = +\infty\end{aligned}$$

2) حالة عدم التعيين $\frac{0}{0} = \lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^5-1}$. بتطبيق قاعدة لوبيتال، نجد

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^5-1} = \lim_{x\to1}\frac{1}{5x^4} = \frac{1}{5}$$

3) حالة عدم التعيين $0.-\infty = \lim_{x\gneq0}x\ln x$. بتطبيق قاعدة لوبيتال، نجد

$$\begin{aligned}\lim_{x\gneq0}x\ln x &= \lim_{x\gneq0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\\ &= \lim_{x\gneq0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\\ &= \lim_{x\gneq0}-x = 0\end{aligned}$$

4) حالة عدم التعيين $-\infty.0 = \lim_{x\to-\infty}xe^x$. بتطبيق قاعدة لوبيتال، نجد

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}xe^x &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}\\ &= \lim_{x\to-\infty}-e^x = 0\end{aligned}$$

تمرين 4−4. تعطى دالة الإيراد الكلي لشركة ما بالعلاقة التالية

$$TR(Q) = -Q^3 - 30Q^2 + 7200Q - 400 \quad \text{وحدة نقدية}$$

- أوجد عدد الوحدات الواجب بيعها حتى يكون الإيراد الكلي أكبر ما يمكن.

الحل. لإيجاد الكمية Q التي من أجلها يكون الإيراد الكلي أكبر ما يمكن، علينا إيجاد القيم الحدية للدالة TR.

لنجد دالة الإيراد الحدي MR. لدينا

$$MR(Q) = \frac{dTR(Q)}{dQ} = -3Q^2 - 60Q + 7200$$

نحل المعادلة

$$\begin{aligned}MR(Q) = 0 &\Leftrightarrow -3Q^2 - 60Q + 7200 = 0\\ &\Leftrightarrow -3(Q-40)(Q+60) = 0\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}Q-40=0\\ Q+60=0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}Q=40\\ Q=-60\end{cases}\end{aligned}$$

ومنه القيم الحرجة ل TR هي $Q=40$ و $Q=-60$ (مرفوضة، لأن $Q\geq 0$) ولدينا

$$\frac{dMR}{dQ}(Q)=-6Q-60$$

وعليه

$$\frac{dMR}{dQ}(40)=-300<0$$

ومنه دالة الإيراد الكلي TR تقبل قيمة حدية عظمى $TR(40)=175600$ من أجل $Q=40$، أي، على الشركة بيع 40 وحدة للحصول على أعلى إيراد كلي وهو 175600 وحدة نقدية.

تمرين 4−5. في مصنع ما، تعطى دالة التكاليف الكلية بالعلاقة التالية

$$TC(Q)=Q^3+105Q^2-2400Q+800 \quad \text{وحدة نقدية}$$

- أوجد التكلفة الحدية عند إنتاج $Q=20$ وحدة.

الحل

- إيجاد دالة التكلفة الحدية MC

$$MC(Q)=\frac{dTC}{dQ}(Q)=3Q^2+210Q-2400$$

ومنه التكلفة الحدية عند $Q=20$

$$MC(20)=3(20)^2+210(20)-2400=3000 \quad \text{وحدة نقدية}$$

ومنه التكلفة الحدية عند إنتاج 20 وحدة هي 3000 وحدة نقدية، أي الوحدة الإضافية (الوحدة رقم 21) تكلف المصنع 3000 وحدة نقدية.

تمرين 4−6. تعطى دالة التكاليف الكلية لشركة ما بالعلاقة التالية

$$TC(Q)=Q^2-40Q+400 \quad \text{وحدة نقدية}$$

- ما هو عدد الوحدات الواجب إنتاجها للحصول على أقل تكلفة كلية ؟

الحل. لإيجاد الكمية Q التي من أجلها تكون التكلفة الكلية أقل ما يمكن، علينا إيجاد القيم الحدية للدالة TC.

لنجد دالة التكلفة الحدية MC. لدينا

$$MC(Q)=\frac{dTC(Q)}{dQ}=2Q-40$$

نحل المعادلة

$$MC(Q)=0 \Leftrightarrow 2Q-40=0$$
$$\Leftrightarrow Q=20$$

ومنه $Q=20$ قيمة حرجة ل TC ولدينا

$$\frac{dMC}{dQ}(Q)=2>0$$

ومنه، دالة التكلفة الكلية TC تقبل قيمة حدية صغرى $TC(20)=0$ من أجل $Q=20$، أي، على الشركة إنتاج 20 وحدة للحصول على أقل تكلفة كلية وهي 0 وحدة نقدية.