في الفصل الرابع، تطرقنا إلى المشتقات، أي إذا كانت لدينا دالة $f(x)$ ، فما هي دالتها المشتقة $f'(x)$ ؟ في هذا الفصل سنجيب على السؤال العكسي، أي إذا كانت لدينا دالة $f(x)$ ، فما هي الدالة الأصلية $F(x)$ ل $f(x)$ ، بحيث $F'(x)=f(x)$ ؟

للتكامل دور مهم في الاقتصاد، فهو يستعمل لإيجاد الدوال الاقتصادية انطلاقا من دوالها الحدية، كأن نجد دالة التكلفة الكلية انطلاقا من دالة التكلفة الحدية، أو دالة الإيراد الكلي باعتباره المساحة المحصورة بين منحنى دالة الإيراد الحدي ومحوري الإحداثيات.

1- التكامل غير المحدود

تعريف 5-1. *لتكن f دالة مستمرة على مجال I من R. نقول أن $F(x)+c$ تكامل غير محدود للدالة $f(x)$ ، إذا وفقط إذا كان $F'(x)=f(x)$ ونكتب*

$$\int f(x)dx = F(x)+c,\quad c\in R$$

ونقرأ " تكامل $f(x)$ تفاضل x" وتسمى $F(x)$ دالة أصلية ل $f(x)$ و c ثابت التكامل. [1]

ملاحظة 5-1

1) إن المتغير x في الترميز $\int f(x)dx$ متغير "أصم"، أي يمكن تعويض الحرف x بأي حرف آخر

$$\int f(x)dx = \int f(u)du = \int f(t)dt = \dots$$ [2]

2) يوجد تكامل غير محدود وحيد $F(x)+c$ ل f يأخذ القيمة λ عند x_0 ، أي

$$F(x_0)+c=\lambda$$ [3]

1-1- التكامل غير المحدود لبعض الدوال المألوفة

الجدول التالي يوضح التكامل غير المحدود لبعض الدوال المألوفة.

الدالة $f(x)$	*التكامل غير المحدود* $\int f(x)dx$
0	$c,\ c\in R$
1	$x+c$
$k,\ k\in R$	$kx+c$
$x^n,\ n\neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$
$u'u^n,\ n\neq -1$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}+c$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+c$
$\frac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert+c$ *(بتصرف)* [4]

[1] Yadolah Dodge. *Mathématiques de base pour économistes.* Springer, Paris, 2007, p. 122.

[2] غوثي بوكلي حسن. المرجع السابق، ص. 298.

[3] Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca . Op. Cit. Proposition 2, p. 149.

[4] غوثي بوكلي حسن. المرجع السابق، ص. 307.

$\int f(x)dx$ التكامل غير المحدود	$f(x)$ الدالة
$2\sqrt{x}+c$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$
$2\sqrt{u}+c$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$
$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}+c$	$\frac{1}{x^n},\ n\neq 1$
$\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}}+c$	$\frac{u'}{u^n},\ n\neq 1$
e^x+c	e^x
e^u+c	$u'e^u$
$-\cos x+c$	$\sin x$
$\sin x+c$	$\cos x$

جدول 5-1- التكامل غير المحدود لبعض الدوال المألوفة (بتصرف) [1]

ملاحظة 5-2. نعلم أن مشتق الدالة المركبة $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ هو $(f\circ g)'(x)=f'(g(x)).g'(x)$ وعليه يجب مراعاة عبارة $g'(x)$ عند إيجاد التكامل غير المحدود للدالة $(f\circ g)'(x)$.

1-2- خواص التكامل غير المحدود

نظرية 5-1. *لتكن f و g دالتين مستمرتين على مجال I من R و $\alpha\in R$. لدينا*

1) $\int(f(x)+g(x))dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

2) [2] $\int \alpha f(x)dx=\alpha\int f(x)dx$

وبتعميم الخاصيتين السابقتين، نجد

3) $\int[\alpha_1 f_1(x)+\alpha_2 f_2(x)+\ldots+\alpha_n f_n(x)]dx=\alpha_1\int f_1(x)dx+\alpha_2\int f_2(x)dx+\ldots+\alpha_n\int f_n(x)dx$

بحيث $i=\overline{1,n}$ $\alpha_i\in R,\ i=\overline{1,n}$ و f_i دوال مستمرة على مجال I من R.

4) $\frac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)$ و [3] $\int f'(x)dx=f(x)+c$

2- التكامل المحدود

تعريف 5-2. *لتكن f دالة مستمرة على مجال $[a,b]$. نسمي التكامل المحدود ل f على $[a,b]$، التكامل الذي يرمز له ب*

$$\int_a^b f(x)dx$$

ونقرأ " تكامل من a إلى b ل $f(x)$ تفاضل x" [4]، المعرف كما يلي

---

(1) Yadolah Dodge. Op. Cit, p. 123.
(2) Stéphane Rossignol. Op. Cit. Proposition 7.8, p. 173.
(3) Knut Sydsæter, Peter Hammond, Arne StrØm. Idem, pp. 294-296.
(4) Yadolah Dodge. Op. Cit, p. 132.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

بحيث F دالة أصلية ل f ويسمى a الحد الأدنى للتكامل المحدود و b حده الأعلى. [1]

ملاحظة 5-3

1) المتغير x في الترميز $\int_a^b f(x)dx$ متغير "أصم"، أي يمكن تعويض الحرف x بأي حرف آخر

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(\mu)d\mu = \ldots$$ [2]

2) يجب التفرقة بين التكامل غير المحدود $\int f(x)dx$ والتكامل المحدود $\int_a^b f(x)dx$، حيث الأول يمثل الدوال الأصلية $F(x)+c$ للدالة $f(x)$، في حين الثاني يمثل عددا حقيقيا $F(b)-F(a)$. [3]

3) يمثل التكامل المحدود $\int_a^b f(x)dx$ هندسيا، المساحة المحصورة بين منحنى الدالة f، محور الفواصل والمستقيمين $x=a$ و $x=b$. بما أن المساحة دائما موجبة (أو معدومة) فانه يكفي أخذ القيمة $\left|\int_a^b f(x)dx\right|$، إن كانت قيمة التكامل $\int_a^b f(x)dx$ سالبة (بتصرف). [4]

- خواص التكامل المحدود

نظرية 5-2. *لتكن f و g دالتين مستمرتين على مجال $[a,b]$ و $\alpha \in R$. لدينا*

1) (الخاصية الخطية للتكامل) $\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ و $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx$

2) (علاقة شال) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx; \quad a \le c \le b$

3) $\int_a^a f(x)dx = 0$

4) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ [5]

5) إذا كان $a<b$ و $\forall x \in [a,b]: f(x) \ge 0$، فان $\int_a^b f(x)dx \ge 0$

6) إذا كان $a<b$ و $\forall x \in [a,b]: f(x) \le g(x)$، فان $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

7) إذا كان $a<b$، فان $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$ [6]

---

[1] Knut Sydsæter, Peter Hammond, Arne StrØm. Idem, p. 302.
[2] Ibid, p. 302.
[3] Ibid, p. 303.
[4] Yadolah Dodge. Op. Cit, pp. 132-135.
[5] غوثي بوكلي حسن. المرجع السابق، ص. 298.
[6] Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca . Op. Cit, pp. 154-155.

3- طرق التكامل

لإيجاد الدوال الأصلية في التكامل سواء كان محدودا أو غير محدود، نلجأ أولا إلى جدول الدوال الأصلية لبعض الدوال المألوفة (الجدول 5-1) مع الاستعانة ببعض خواص التكاملين. أما إن كان التكامل معقدا، فنستخدم طرقا لتبسيطه وللرجوع في النهاية إلى الجدول 5-1. فيما يلي بعض أشهر طرق التكامل.

3-1- طريقة تغيير المتغير

نظرية 5-3. *لتكن f دالة مستمرة على مجال $[a,b]$، g دالة قابلة للاشتقاق ومشتقتها الأولى مستمرة على مجال $[\alpha,\beta]$ و g تأخذ قيمها في $[a,b]$ بحيث $g(\alpha)=a$ و $g(\beta)=b$، لدينا إذا*

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f\left(g(x)\right)g'(x)dx \quad (1)$$

ملاحظة 5-4. بالنسبة للتكامل غير المحدود، لدينا

$$\int f(u)du=\int f\left(g(x)\right)g'(x)dx, \quad u=g(x) \quad (2)$$

3-2- طريقة التكامل بالتجزئة

تستخدم طريقة التكامل بالتجزئة في حالة جداء دالتين، بحيث يمكن إيجاد الدالة الأصلية لإحديهما بسهولة.

يمكن استنتاج عبارة التكامل بالتجزئة من مشتق جداء دالتين كما يلي

$$\left(f.g\right)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

ومنه

$$f(x)g'(x)=\left(f.g\right)'(x)-f'(x)g(x)$$

وعليه

$$\int f(x)g'(x)dx=\int\left(f.g\right)'(x)dx-\int f'(x)g(x)dx \quad (3)$$
$$=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

وبالنسبة للتكامل المحدود، نحصل على العلاقة التالية

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx=\left[f(x)g(x)\right]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$$

بحيث f و g دالتان قابلتان للاشتقاق ومشتقتاهما مستمرتان على مجال $[a,b]$ من R. (4)

3-3- طريقة التفريق إلى كسور بسيطة

لتكن لدينا الدالة الناطقة $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ حيث $Q(x)\neq 0$ ودرجة البسط $P(x)$ أقل من درجة المقام $Q(x)$ ونكتب $\deg P(x)<\deg Q(x)$ (إن كان $\deg P(x)\geq\deg Q(x)$، نلجأ للقسمة الإقليدية، فنحصل على

---

(1) غوثي بوكلي حسن. المرجع السابق. قضية 7، ص. 309.

(2) Knut Sydsæter, Peter Hammond, Arne StrØm. Idem, p. 320.

(3) Naïla Hayek, Jean-Pierre Leca. Op. Cit, p. 163.

(4) Stéphane Rossignol. Op. Cit. Proposition 7.11, p. 177.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \text{حاصل قسمة } P \text{ على } Q + \frac{\text{باقي قسمة } P \text{ على } Q}{Q(x)}$$

بحيث درجة باقي قسمة P على Q أقل من درجة Q).

إن كانت هناك صعوبة في إيجاد دالة أصلية للدالة f ، نلجأ إلى طريقة تفريق الكسر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ إلى كسور بسيطة يسهل مكاملتها. فيما يلي أهم الحالات التي تستخدم فيها هذه الطريقة. [1]

3-3-1- تحليل المقام إلى عدة عوامل غير متكررة

إن أمكن تحليل المقام $Q(x)$ إلى عدة عوامل (من الدرجة الأولى، أو الثانية أو الثالثة أو أكثر، لا يمكن تحليلها إلى جداء عوامل أقل درجة) غير متكررة، فإنه ينتج لنا عدة كسور جزئية على النحو التالي

$$(*)..... f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\alpha}{a_1x+b_1} + \frac{\beta}{a_2x+b_2} + \frac{\gamma x+\lambda}{a_3x^2+b_3x+c_1} + \frac{\vartheta x^2+\tau x+\sigma}{a_4x^3+b_4x^2+c_2x+d_1} + ...$$

بحيث $a_1,..,a_4,b_1,...,b_4,c_1,c_2,d_1,\alpha,\beta,\gamma,\lambda,\vartheta,\tau,\sigma,...$ أعداد حقيقية ودرجة البسط في الكسور الجزئية أقل بدرجة واحدة من درجة المقام (بتصرف). [2]

3-3-2- تحليل المقام إلى عدة عوامل بعضها متكرر

لتكن لدينا الدالة $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ بحيث $Q(x) \neq 0$ و $\deg P(x) < \deg Q(x)$. إن أمكن تحويل المقام $Q(x)$ إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى بعضها متكرر، فان العوامل المتكررة تنتج لنا العبارة التالية

$$(**).....\frac{g(x)}{(x+k)^n} = \frac{a}{x+k} + \frac{b}{(x+k)^2} + ... + \frac{m}{(x+k)^{n-1}} + \frac{l}{(x+k)^n}$$

بحيث $k,a,b,...,m,l \in R$ و $\deg(g(x)) < n$.

يمكن تطبيق العلاقة (**)، إن أمكن تحويل $Q(x)$ إلى جداء عوامل من درجة أعلى بعضها متكرر، مع مراعاة أن تكون درجة البسط أقل بدرجة واحدة من درجة المقام (بتصرف). [3]

ملاحظة 5-5. إن أمكن تحويل المقام $Q(x)$ إلى جداء عوامل بعضها متكرر والآخر غير متكرر، فإننا نجمع بين العبارتين (*) و (**).

4- تطبيقات التكامل في الاقتصاد

يستخدم التكامل في الاقتصاد –على سبيل المثال– لحساب دالتي التكلفة الكلية والإيراد الكلي باعتبارهما الدوال الأصلية لدالتي التكلفة الحدية والإيراد الحدي على الترتيب، أي

$$TC(Q) = \int MC(Q)dQ \quad \text{و} \quad TR(Q) = \int MR(Q)dQ$$

---

[1] سلطان محمد عبد الحميد. *رياضيات الأعمال للتجاريين*. المكتبة العصرية، مصر، 2007، ص ص. 373-374.

[2] نفسه، ص. 374.

[3] نفسه ، ص. 381.

5- تمارين

تمرين 5-1. أوجد ما يلي

$$\int (3x+x^4-8)dx \qquad \int \left(\frac{2}{x}-e^x\right)dx \qquad \int \left(\frac{5}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^4}\right)dx \qquad \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+6}}dx$$

$$\int_0^1 (2x-1)^4 dx \qquad \int_{-3}^{2} \frac{1}{x+4}dx \qquad \int_2^4 \frac{1}{(3x-7)^5}dx \qquad \int_1^3 e^{6x}dx$$

الحل. إيجاد ما يلي

$$\int (3x+x^4-8)dx = \frac{3}{2}x^2+\frac{1}{5}x^5-8x+c \quad /c\in R$$

$$\int \left(\frac{2}{x}-e^x\right)dx = 2\ln|x|-e^x+c$$

$$\int \left(\frac{5}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^4}\right)dx = 10\sqrt{x}-\frac{1}{3x^3}+c$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+6}}dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3+6}+c$$

$$\int_0^1 (2x-1)^4 dx = \left[\frac{1}{10}(2x-1)^5\right]_0^1 = \frac{1}{10}\left(1^5-(-1)^5\right) = \frac{1}{5}$$

$$\int_{-3}^{2} \frac{1}{x+4}dx = \left[\ln|x+4|\right]_{-3}^{2} = \ln(6)$$

$$\int_2^4 \frac{1}{(3x-7)^5}dx = \left[\frac{-1}{12(3x-7)^4}\right]_2^4 = \frac{-1}{12}\left(\frac{1}{625}-1\right) = \frac{52}{625}$$

$$\int_1^3 e^{6x}dx = \left[\frac{1}{6}e^{6x}\right]_1^3 = \frac{1}{6}\left(e^{18}-e^6\right)$$

تمرين 5-2. باستعمال طريقة تغيير المتغير، أوجد ما يلي

$$(I)=\int_0^1 2x\left(x^2+1\right)^3 dx \quad \left(y=x^2+1\right) \qquad (J)=\int \frac{e^{4x}}{e^{4x}+5}dx \quad \left(y=e^{4x}+5\right)$$

الحل. إيجاد ما يلي، باستعمال طريقة تغيير المتغير

1) $(I)=\int_0^1 2x\left(x^2+1\right)^3 dx$

نضع $y=x^2+1$ ومنه $dy=2xdx$. إذا كان $x=0$ فان $y=0^2+1=1$ وإذا كان $x=1$ فان $y=1^2+1=2$. إذا

$$(I)=\int_1^2 y^3 dy$$

$$=\left[\frac{1}{4}y^4\right]_1^2$$

$$=\frac{1}{4}(16-1)=\frac{15}{4}$$

2) $(J)=\int \frac{e^{4x}}{e^{4x}+5}dx$

نضع $y=e^{4x}+5$ ومنه $dy=4e^{4x}dx$ وعليه $e^{4x}dx=\frac{1}{4}dy$. إذا

$$(J)=\frac{1}{4}\int \frac{1}{y}dy$$
$$=\frac{1}{4}\ln|y|+c$$
$$=\frac{1}{4}\ln\left|e^{4x}+5\right|+c$$

تمرين 5-3. باستعمال طريقة التكامل بالتجزئة، أوجد ما يلي

$$(I)=\int 2xe^{x}dx \qquad (J)=\int_{1}^{2} x(x+1)^{3}dx$$

الحل. إيجاد ما يلي، باستعمال طريقة التكامل بالتجزئة

1) $(I)=\int 2xe^{x}dx=\int 2x.e^{x}dx$

نضع

$$f(x)=2x \quad \Rightarrow f'(x)=2dx$$
$$g'(x)=e^{x}dx \Rightarrow g(x)=e^{x}$$

ومنه

$$(I)=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

أي

$$(I)=2xe^{x}-\int 2.e^{x}dx$$
$$=2xe^{x}-2\int e^{x}dx$$
$$=2xe^{x}-2\left(e^{x}+c\right)$$
$$=2e^{x}(x-1)+c$$

2) $(J)=\int_{1}^{2} x(x+1)^{3}dx=\int_{1}^{2} x.(x+1)^{3}dx$

نضع

$$f(x)=x \qquad \Rightarrow f'(x)=1dx$$
$$g'(x)=(x+1)^{3}dx \Rightarrow g(x)=\frac{1}{4}(x+1)^{4}$$

ومنه

$$(J)=\left[f(x)g(x)\right]_{1}^{2}-\int_{1}^{2} f'(x)g(x)dx$$

أي

$$\begin{aligned}(J)&=\frac{1}{4}\Big[x(x+1)^4\Big]_1^2-\frac{1}{4}\int_1^2(x+1)^4\,dx\\&=\frac{1}{4}\Big[x(x+1)^4\Big]_1^2-\frac{1}{20}\Big[(x+1)^5\Big]_1^2\\&=\frac{1}{4}(162-16)-\frac{1}{20}(243-32)\\&=\frac{519}{20}\end{aligned}$$

تمرين 5-4. باستعمال طريقة التفريق إلى كسور بسيطة، أوجد ما يلي

$$(I)=\int\frac{x^4+2x^2-2}{x^3+2x}dx \qquad (J)=\int_0^1\frac{3x+2}{x^2+2x+1}dx$$

الحل. إيجاد ما يلي، باستعمال طريقة التفريق إلى كسور بسيطة

1) $(I)=\int\frac{x^4+2x^2-2}{x^3+2x}dx=\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx$

نلاحظ أن $\deg(P)=4>\deg(Q)=3$ وعليه نقوم بالقسمة الإقليدية لجعل درجة البسط أقل من درجة المقام، أي

$$\begin{array}{l|l}x^4+2x^2-2 & x^3+2x \\ - & \overline{\qquad\quad x\qquad\quad} \\ \underline{x^4+2x^2} & \\ -2 & \end{array}$$

ومنه

$$\begin{aligned}(I)&=\int\left(x-\frac{2}{x^3+2x}\right)dx\\&=\int xdx+\int\frac{-2}{x^3+2x}dx\end{aligned}$$

بتحليل المقام، نجد $x^3+2x=x\left(x^2+2\right)$ ومنه

$$(I)=\int xdx+\int\frac{-2}{x\left(x^2+2\right)}dx$$

كثير الحدود x^2+2 لا يقبل جذور في R ومنه لا يقبل التحليل إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى. في التفرقة إلى كسور بسيطة، يجب أن تكون درجة البسط أقل بدرجة واحدة من درجة المقام. لدينا $\deg(x)=1$ وعليه درجة بسطه تساوي 0 أي عدد ثابت a و $\deg(x^2+2)=2$ فإن درجة بسطه تساوي 1 أي $bx+c$ ومنه

$$(I)=\int xdx+\int\frac{-2}{x\left(x^2+2\right)}dx=\int xdx+\int\left(\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{x^2+2}\right)dx$$

لإيجاد الثوابت a، b و c، نلجأ لطريقة الجمع والتعويض، أي

$$\frac{-2}{x\left(x^2+2\right)}=\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{x^2+2}$$

بالجمع، نجد

$$\frac{-2}{x\left(x^2+2\right)}=\frac{a\left(x^2+2\right)+x\left(bx+c\right)}{x\left(x^2+2\right)}$$

بالمطابقة طرفا لطرف، نجد

$$-2=a\left(x^2+2\right)+x\left(bx+c\right)=\left(a+b\right)x^2+cx+2a$$

أي

$$\begin{cases}a+b=0\\c=0\\2a=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=1\\c=0\end{cases}$$

وعليه

$$\begin{aligned}(I)&=\int xdx+\int\frac{-2}{x\left(x^2+2\right)}dx\\&=\int xdx+\int\left(\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{x^2+2}\right)dx\\&=\int xdx+\int\left(\frac{-1}{x}+\frac{x}{x^2+2}\right)dx\\&=\int xdx+\int\frac{-1}{x}dx+\int\frac{x}{x^2+2}dx\\&=\frac{1}{2}x^2-\ln|x|+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2\right|+c\end{aligned}$$

2) $(J)=\int_0^1\frac{3x+2}{x^2+2x+1}dx=\int_0^1\frac{P(x)}{Q(x)}dx$

نلاحظ أن $\deg(P)=1<\deg(Q)=2$. بتحليل المقام، نجد $x^2+2x+1=\left(x+1\right)^2$ ومنه

$$(J)=\int_0^1\frac{3x+2}{\left(x+1\right)^2}dx$$

نلاحظ أن المقام $\left(x+1\right)^2$ متكرر مرتين وعليه

$$\begin{aligned}(J)&=\int_0^1\frac{3x+2}{\left(x+1\right)^2}dx\\&=\int_0^1\left(\frac{a}{x+1}+\frac{b}{\left(x+1\right)^2}\right)dx\end{aligned}$$

بالجمع، نجد

$$\begin{aligned}(J)&=\int_0^1\frac{a(x+1)+b}{\left(x+1\right)^2}dx\\&=\int_0^1\frac{ax+\left(a+b\right)}{\left(x+1\right)^2}dx\\&=\int_0^1\frac{3x+2}{\left(x+1\right)^2}dx\end{aligned}$$

بالمطابقة طرفا لطرف بين آخر سطرين من التكامل (J)، نجد

$$\begin{cases} a=3 \\ a+b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-1 \end{cases}$$

ومنه

$$\begin{aligned}(J) &= \int_0^1 \left(\frac{3}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx \\ &= 3\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx - \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2} dx \\ &= 3\left[\ln|x+1| \right]_0^1 + \left[\frac{1}{x+1} \right]_0^1 \\ &= 3\ln(2) + \frac{1}{2} - 1 \\ &= 3\ln(2) - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

تمرين 5-5. التكلفة الطبية السنوية للعامل الواحد بالدينار الجزائري في أحد المصانع، تعطى بالعلاقة التالية

$$C(x) = 3000\left(2 + 0.4x^3\right) \qquad DA$$

مع x تمثل سنوات خدمة العامل بالمصنع.

- قدِّر التكلفة الطبية للعامل الواحد بعد مرور ست سنوات من الآن.

الحل. التكلفة الطبية للعامل الواحد بعد مرور ست سنوات من الآن هي

$$\begin{aligned}C &= \int_0^6 C(x)\,dx \\ &= \int_0^6 \left(3000\left(2 + 0.4x^3\right)\right) dx \\ &= 3000\int_0^6 \left(2 + 0.4x^3\right) dx \\ &= 3000\left[2x + 0.1x^4 \right]_0^6 \\ &= 424800 \quad DA\end{aligned}$$

أي، العامل الواحد سيكلف المصنع طبيا بعد ست سنوات من الآن ما يقارب 424800 دينارا جزائريا.

تمرين 5-6. إذا كانت دالة الإيراد الحدي لشركة ما معطاة بالعلاقة التالية

$$MR(Q) = Q - 4 + \frac{3}{Q-1} \qquad \text{وحدة نقدية}$$

- أوجد دالة الإيراد الكلي.

الحل. دالة الإيراد الكلي هي

$$\begin{aligned}TR(Q) &= \int MR(Q)\,dQ \\ &= \int \left(Q - 4 + \frac{3}{Q-1} \right) dQ \\ &= \frac{1}{2}Q^2 - 4Q + 3\ln|Q-1| + c\end{aligned}$$