

# Modélisation et Commande des Robots Manipulateurs

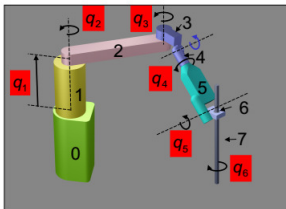
Dr Bensalah Choukri

Université Abou Bekr Belkaid  
Faculté de Technologie  
Laboratoire d'Automatique

# Chapitre I: Modélisation Géométrique des bras manipulateurs

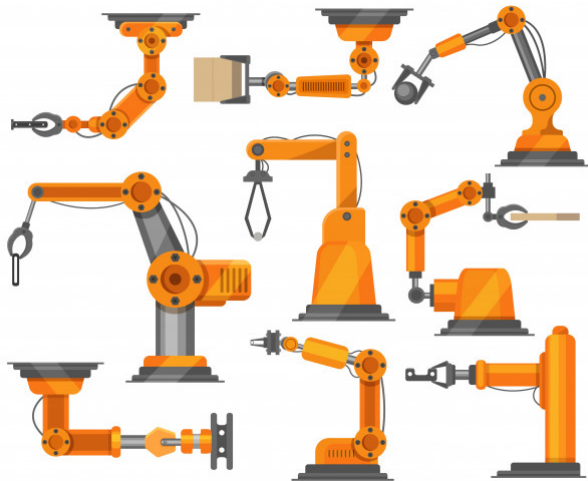
# Introduction

Ce chapitre est dédié à la construction de modèles géométriques direct. La position et l'orientation (pose) de l'organe terminal sont reliées aux variables articulaires  $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  de la structure mécanique par rapport à un repère de référence situé à la base du robot (le plus souvent une des deux extrémités: la base ou l'organe terminal). Pour se faire, deux approches vont être utilisées; l'approche géométrique et la convention de Denavit-Hartenberg. Par la suite, nous nous intéresserons au problème inverse : comment exprimer les variables articulaires en fonction de la pose de l'organe terminal.



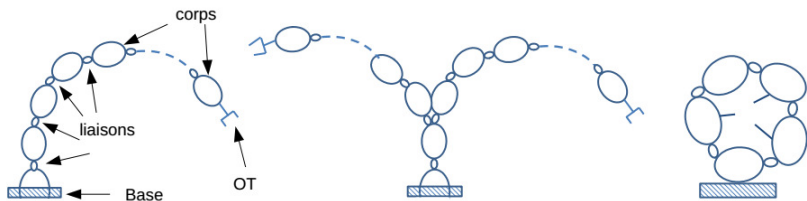
## Types de bras manipulateurs considérés

On ne considère ici que les systèmes mécaniques composés de chaînes cinématiques polyarticulées ouvertes, appelés bras manipulateurs série.



## Description des chaînes cinématiques

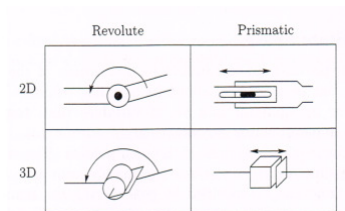
La chaîne cinématique structure le système mécanique articulé et correspond aux divers corps et liaisons (ou articulations) entre les corps. Les liaisons sont passives ou actives (motorisées). La chaîne peut être ouverte (robot série), multiple ou fermée.



## Liaison entre deux corps

Une liaison entre deux corps est une relation de contact entre deux solides. Elle définit aussi le **degré de liberté ddl** entre les corps d'une chaîne cinématique.

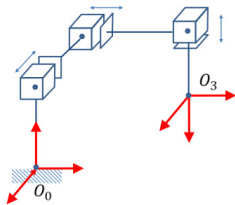
- **Degrés de liberté d'une liaison** : C'est le nombre de déplacements élémentaires indépendants autorisés par cette liaison.



- Articulation **prismatique**, noté **P**. 1 ddl en translation  $T_z$  et la valeur articulaire  $q = \text{longueur}[m]$ .
- Articulation **rotoïde**, noté **R**. 1 ddl en rotation  $R_z$  et la valeur articulaire  $q = \text{angle}[rad], [deg]$ .

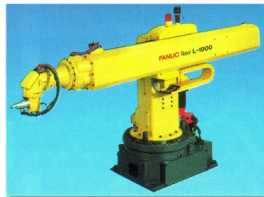
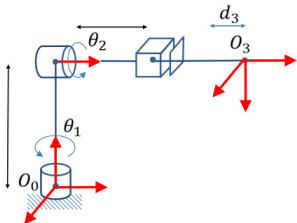
# Exemples sur la morphologie des robots

**Le porteur cartésien PPP** : 3 articulations prismatiques non parallèles.

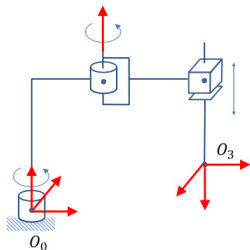


(à gauche) Schématisation d'un porteur PPP. (à droite) Robot cartésien Toshiba BA-II.

**Le porteur sphérique RRP** : 2 articulations pivots d'axes perpendiculaires et 1 articulation prismatique.

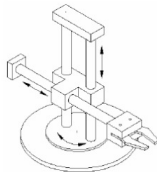
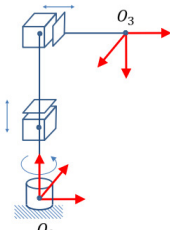


**Les porteurs SCARA RRP ou SCARA PRR** : 2 articulations pivots d'axes parallèles et 1 articulation prismatique. SCARA signifie *Selective Compliance Articulated Robot for Assembly*.



(à gauche) Schématisation d'un porteur RRP SCARA. (au centre) Robot SCARA Epson G10-650.  
(à droite) Robot SCARA d'Adept Technology.

**Le porteur cylindrique RPP (R2P)** : 1 articulation pivot et 2 articulations prismatiques d'axes perpendiculaires.





# Modélisation Géométrique directe MGD

## (*Forward kinematics*)

La Modélisation Géométrique Directe ou MGD formalise mathématiquement la chaîne cinématique et s'intéresse à relier l'espace articulaire associé aux différentes liaisons du robot,  $q$ , à l'espace opérationnel associé à la configuration  $X$  de l'organe terminal pour une tâche robotique à réaliser. Cette relation vectorielle exprime les positions et orientations des  $m$  coordonnées opérationnelles de  $X$  en fonction des  $n$  variables articulaires de  $q$ .

$$X = f(q)$$

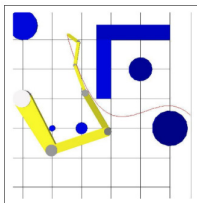
avec  $f()$  est une fonction vectorielle dépend des variable  $q_i$ .

## Redondance ( $m < n$ )

Un robot est dit **redondant** (ou globalement redondant) si la dimension  $m$  de l'espace opérationnel - correspondant au nombre de degrés de liberté de l'organe terminal - est inférieur au nombre  $n$  de variables de l'espace articulaire. C'est le cas notamment si sa structure présente une des propriétés suivantes :

- ▶ Plus de 6 articulations,
- ▶ Plus de trois articulations pivots d'axes parallèles,
- ▶ Plus de trois articulations prismatiques,
- ▶ Deux axes d'articulations prismatiques parallèles,
- ▶ Deux axes d'articulations pivots confondus.

## Exemple d'application de la redondance: Évitement d'obstacle



Robot planaire à 6 ddl pour une trajectoire imposée de la position de l'organe terminal tout en évitant les obstacles

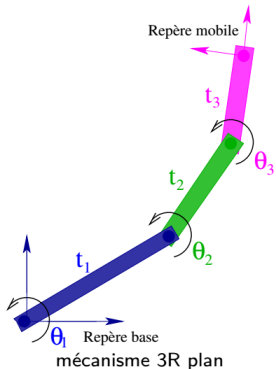
## Redondance locale

Pour une configuration particulière dite **singulière**, le robot peut devenir **localement redondant**, telles que le nombre de degrés de liberté de l'organe terminal soit inférieur à la dimension de l'espace articulaire.



Robot manipulateur anthropomorphe STAUBLI RX-160 à 6 ddl. La configuration verticale de l'image de droite est une redondance locale car il y a clairement plusieurs façons (plusieurs choix d'articulations) de réaliser une rotation d'axe vertical de l'effecteur.

# Exemple

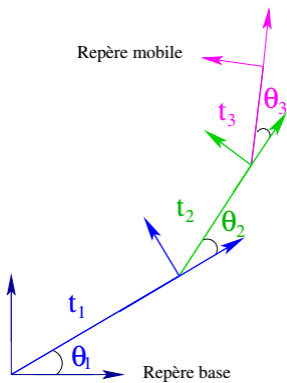


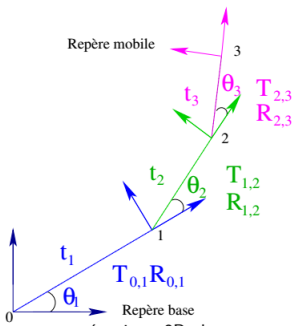
- ▶ Identifier les coordonnées articulaires
- ▶ Identifier les paramètres géométriques qui définissent le mécanisme
- ▶ Associer à chacune des articulations un repère
- ▶ Déterminer le positionnement (matrice  $R$ , vecteur  $P$ ) de chaque repères par rapport au précédent.
- ▶ Mettre ces changements de repères sous la forme de matrices homogènes
- ▶ Montrer comment calculer le MGD de ce mécanisme

# Solution

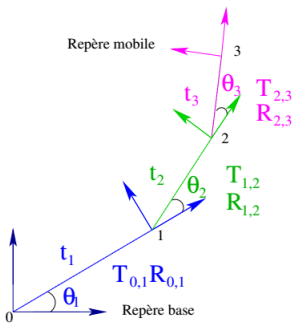
- ▶ Les paramètres articulaires sont :  $q_1 = \theta_1, q_2 = \theta_2, q_3 = \theta_3$ .
- ▶ Les paramètres géométriques sont :  $\xi = [t_1, t_2, t_3]$ .
- ▶ Les paramètres cartesiens sont :  $X = [x, y]$

- Associer à chacune des articulations un repère









- Déterminer le positionnement (matrice  $R$ , vecteur  $P$ ) de chaque repère par rapport au précédent.

$$R_{i,j} = \begin{pmatrix} \cos \theta_j & -\sin \theta_j \\ \sin \theta_j & \cos \theta_j \end{pmatrix}$$

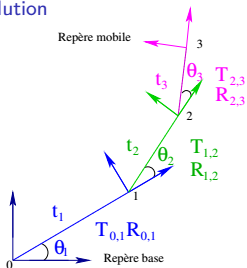
$$T_{i,j} = \begin{pmatrix} t_j \cdot \cos \theta_j \\ t_j \cdot \sin \theta_j \end{pmatrix}$$

$i \in \{0, 1, 2\}, j \in \{1, 2, 3\}$

- Mettre ces changements de repères sous la forme de matrice homogène

$$H_{i,j} = \begin{pmatrix} R_{i,j} & T_{i,j} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## Solution



- ▶ Montrer comment calculer le MGD de ce mécanisme

$$H_{0,3} = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & t_1 \cdot \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & t_1 \cdot \sin \theta_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \dots$$

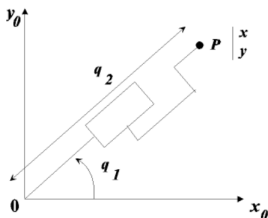
$$\begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & t_2 \cdot \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & t_2 \cdot \sin \theta_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & t_3 \cdot \cos \theta_3 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & t_3 \cdot \sin \theta_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & -\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & t_1 \cdot \cos \theta_1 + t_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) + t_3 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & t_1 \cdot \sin \theta_1 + t_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) + t_3 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} t_1 \cdot \cos \theta_1 + t_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) + t_3 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ t_1 \cdot \sin \theta_1 + t_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) + t_3 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \end{pmatrix}$$

## Exemple

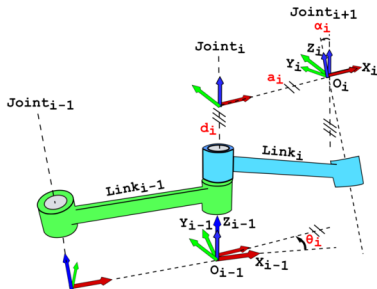
Soit le manipulateur évoluant dans un plan et décrit dans la figure suivante:



- ▶ Déterminer le modèle géométrique direct  $X = f(q)$  avec  $X = [x, y]^T$ .
- ▶ Trouver l'expression inverse  $q = g(X)$ .

## Convention de Denavit-Hartenberg

Quand l'architecture de la structure mécanique est plus complexe, il faut une méthode systématique. La convention de **Denavit-Hartenberg (D-H)** permet de construire itérativement l'ensemble des transformations de la structure. Elle s'appuie sur l'hypothèse de liaisons prismatique ou rotoïde entre les corps. Chaque transformation géométrique  $A_{i-1}^i$  entre les repères orthonormés  $(R_{i-1})$  et  $(R_i)$  des corps rigides successifs  $(C_{i-1})$  et  $(C_i)$  est décomposée en quatre transformations élémentaires (**RTTR**):



$$\begin{aligned}
A^{i-1}_i &= \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\quad \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta_i & -s\theta_i & 0 \\ 0 & s\theta_i & c\theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & ac\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & as\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

## Procédure de DH

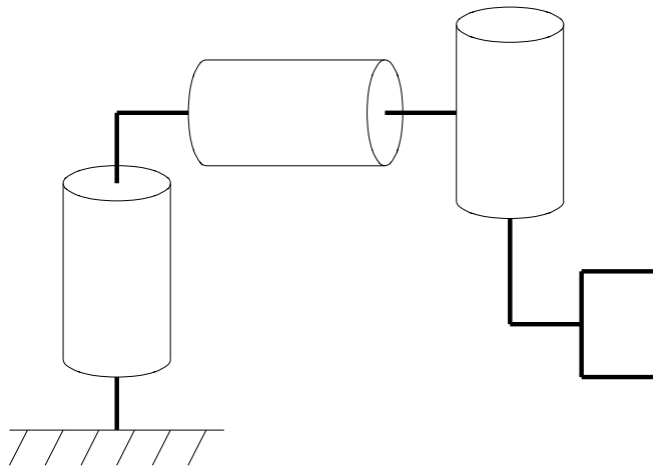
- 1 Numéroté les articulations de  $J_1$  jusqu'à  $J_n$  en commençant par la base et en terminant par la dernière articulation.
- 2 Établir un repère, numéroté  $O_0$  à la base ayant  $z_0$  aligné avec l'axe de rotation du joint  $J_1$ .  $x_0$  et  $y_0$  sont choisis en vérifiant la règle de la main droite.
- 3 Placer l'axe  $z_i$  aligné avec l'axe du joint  $J_{i+1}$
- 4 Placer l'origine  $O_i$ , l'intersection  $z_{i-1}$  avec  $z_i$ . S'il n'y a pas d'intersection, utiliser l'intersection de  $z_i$  avec la normale commune à  $z_i$  et  $z_{i-1}$ .
- 5 Choisir  $x_i$  orthogonale à  $z_i$  et  $z_{i-1}$  si ces deux axes intersectent. Si  $z_i$  et  $z_{i-1}$  sont parallèles, choisir  $x_i$  parallèle au perpendiculaire commun de  $z_i$  et  $z_{i-1}$  en s'éloignant de  $z_{i-1}$ .
- 6 Établir le repère de l'effecteur final  $O_{n_x n_y n_z}$ .
- 7 Établir  $y_i$  pour compléter un repère de la main droite.
- 8 Placer le point  $b_i$  à l'intersection de  $x_i$  et  $z_{i-1}$ . S'il n'y a pas d'intersection, utiliser l'intersection de  $x_i$  avec la normale commune en  $x_i$  et  $z_{i-1}$ .

## Les paramètres de D-H

Créer un tableau des paramètres  $\theta_i$ ,  $d_i$ ,  $a_i$  et  $\alpha_i$  définis comme suit:

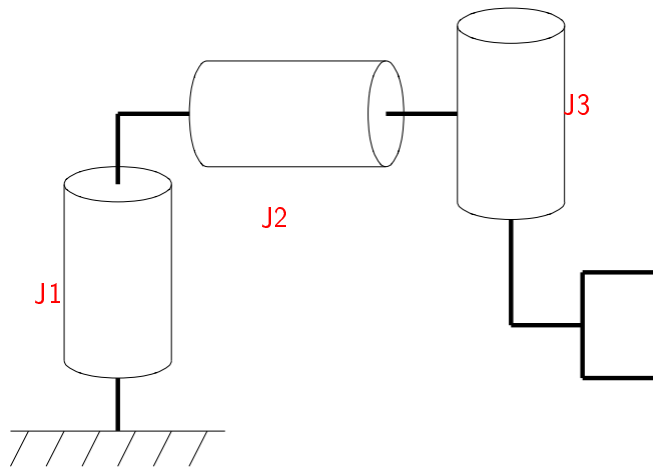
- ▶ Évaluer l'angle  $\theta_i$  pour la rotation de  $x_{i-1}$  à  $x_i$  mesuré par rapport à  $z_{i-1}$ .
- ▶ Évaluer  $d_i$ , la distance de l'origine du repère  $i - 1$  au point  $b_i$  mesuré au long de  $z_{i-1}$ .
- ▶ Évaluer  $a_i$ , la distance du point  $b_i$  à l'origine du repère  $i$  mesuré le long de  $x_i$ .
- ▶ Évaluer l'angle  $\alpha_i$  pour la rotation de  $z_{i-1}$  à  $z_i$  par rapport à  $x_i$ .

## Exemple

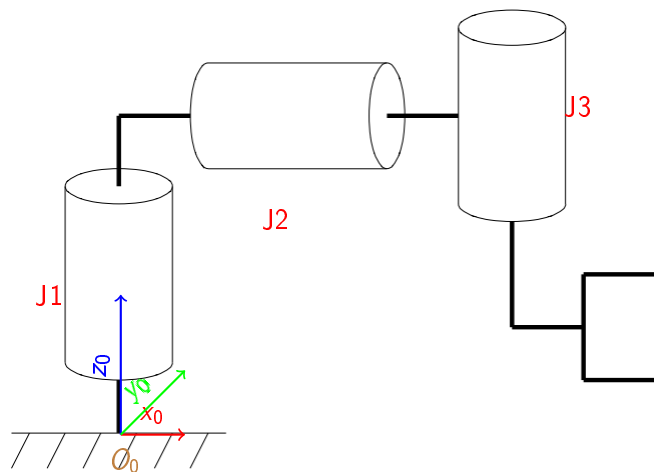




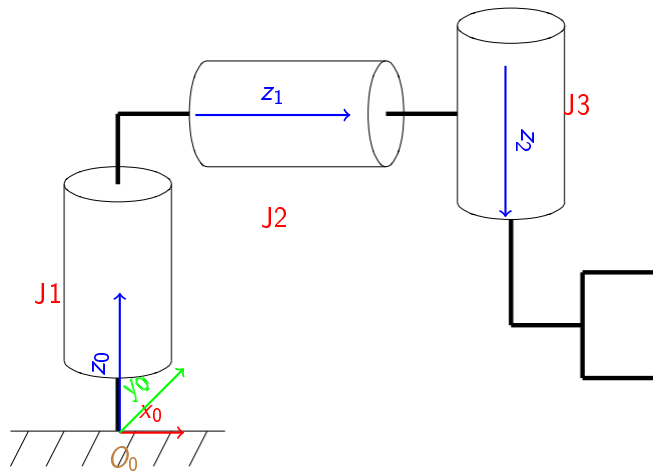
## Exemple



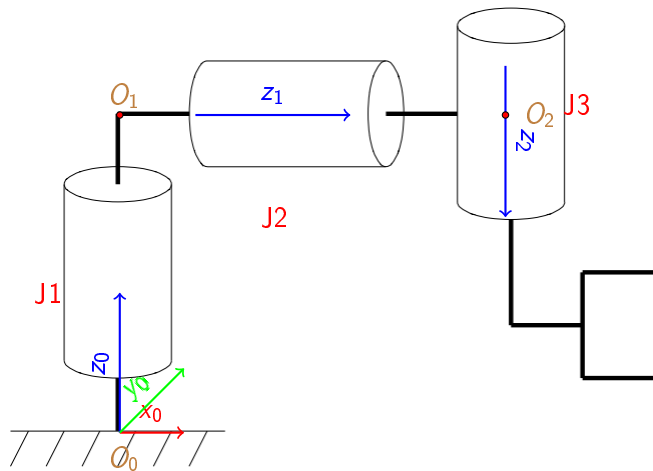
# Exemple



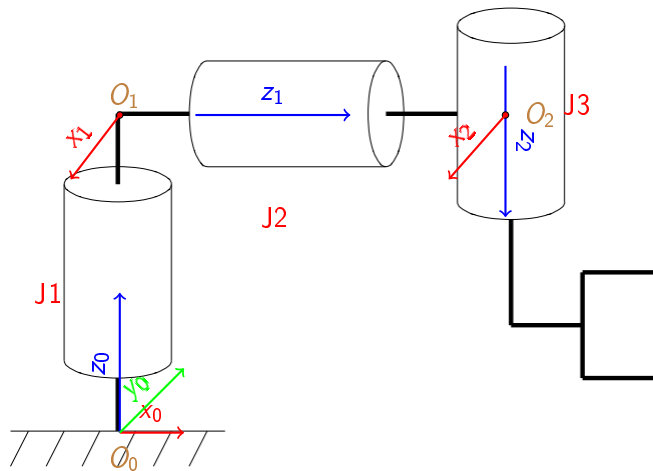
# Exemple



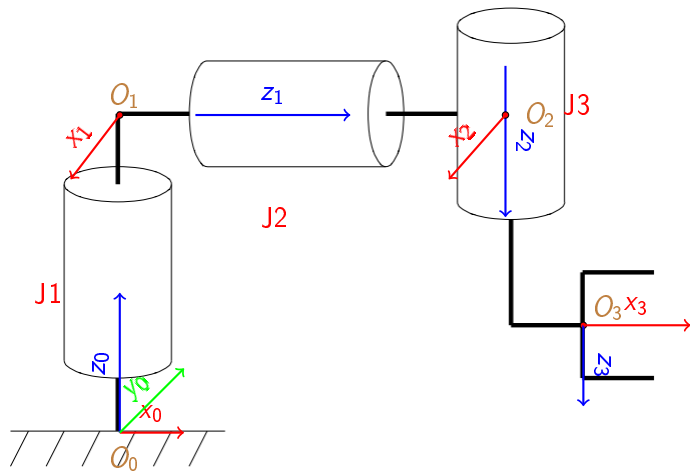
# Exemple



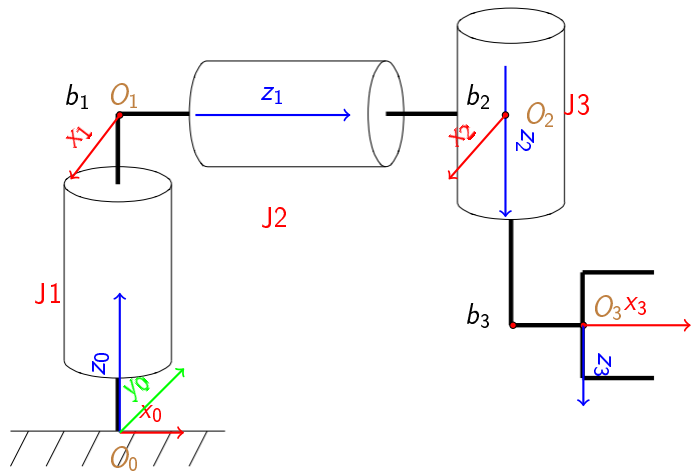
# Exemple



# Exemple



# Exemple



# Exemple

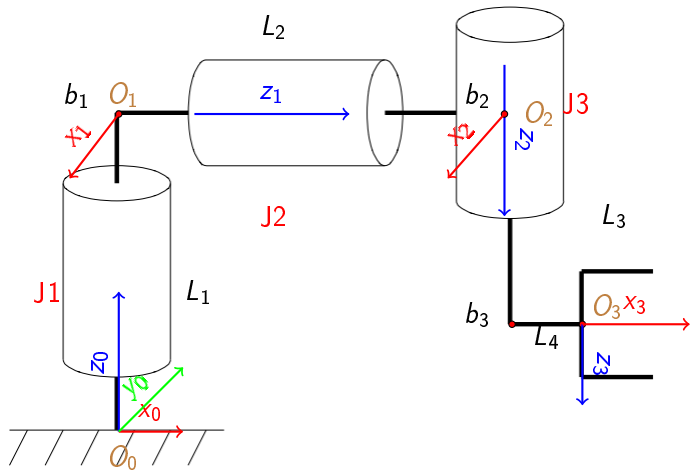




Table 1: Les paramètres de DH

Joint	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
$J_1$	$\theta_1 - \frac{\pi}{2}$	$l_1$	0	$-\frac{\pi}{2}$
$J_2$	$\theta_2$	$l_2$	0	$-\frac{\pi}{2}$
$J_3$	$\theta_3 - \frac{\pi}{2}$	$l_3$	$l_4$	0