Modélisation et Commande des Robots Manipulateurs

Dr Bensalah Choukri

Université Abou Bekr Belkaid
Faculté de Technologie
Laboratoire d'Automatique

Chapitre II: Modélisation Géométrique Inverse des bras manipulateurs

Introduction

Il s'agit de déterminer les coordonnées articulaires q permettant d'obtenir une situation désirée pour l'organe terminal et spécifiée par les coordonnées opérationnelles X. Il n'existe pas de méthode systématique d'inversion du modèle géométrique. Lorsqu'elle existe, la forme explicite, issue d'une inversion mathématique, qui donne toutes les solutions possibles au problème inverse (il y a rarement unicité de la solution) constitue le modèle géométrique inverse.

$$q = f^{-1}(X)$$

- Si $n < m$: Pas de solution
- Si $n = m$: Nombre fini de solutions.
- Si $n > m$: Infinité de solutions.

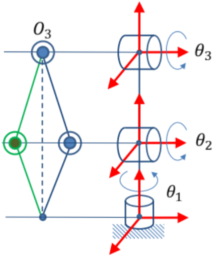
Exemple

MGI et redondance locale : <u>Exemple du porteur 3R ($n = 3$ ddl)</u>

L'orientation du corps (C_3) d'un porteur 3R peut être réalisée de plusieurs façons (zones vertes et bleues). En effet la matrice de rotation ${}^0R_3$ est

$$ {}^0R_3 = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & s_1 \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & -c_1 \\ s_{23} & c_{23} & 0 \end{bmatrix} $$

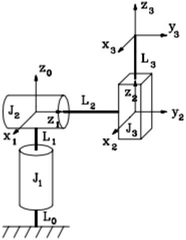
On voit que la dernière colonne fournit la valeur de θ_1 de manière unique, alors que la dernière ligne ne donne de manière unique que la somme des angles $\theta_2 + \theta_3$: c'est une redondance locale (singularité).



Méthodes possibles pour MGI

- Il n'existe pas de méthode systématique d'inversion du modèle géométrique.
- Deux approches sont possibles pour obtenir une solution du problème GI.
  - Approche Algébrique: c-à-d l'élaboration des équations obtenues du MGD jusqu'à l'obtention d'un ensemble d'équations adéquates permettant d'obtenir la solution.
  - Approche géométrique: basée sur des considérations géométriques qui dépendent de la structure géométrique du robot.

Exemple Approche Algébrique



Direct kinematic model:

$$
{}^{0}\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{n} & \mathbf{s} & \mathbf{a} & \mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} C_1C_2 & -S_1 & C_1S_2 & -d_2S_1 + d_3C_1S_2 \\ C_2S_1 & C_1 & S_1S_2 & d_2C_1 + d_3S_1S_2 \\ -S_2 & 0 & C_2 & d_3C_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

A partir de la relation

$$A_0^3 = A_0^1 A_1^2 A_2^3$$

$$
({}^{0}\mathbf{H}_1)^{-1}\,{}^{0}\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 & d_3S_2 \\ S_2 & 0 & -C_2 & -d_3C_2 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$= {}^{1}\mathbf{H}_2\,{}^{2}\mathbf{H}_3$$

Solution Approche Algébrique

By equating the position vectors,

$$^{1}\mathbf{p}_p = \begin{bmatrix} p_x C_1 + p_y S_1 \\ -p_z \\ -p_x S_1 + p_y C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_3 S_2 \\ -d_3 C_2 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

The vector $^{1}\mathbf{p}_p$ depends only on θ_2 and d_3! Let's define $a = \tan\theta_1/2$, then

$$C_1 = \frac{1-a^2}{1+a^2} \qquad S_1 = \frac{2a}{1+a^2}$$

By substitution in the last element of $^{1}\mathbf{p}_p$

$$(d_2 + p_y)a^2 + 2p_x a + d_2 - p_y = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad a = \frac{-p_x \pm \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2}}{d_2 + p_y}$$

Two possible solutions! $((p_x^2 + p_y^2 - d_2^2) > 0??)$

Then

$$\theta_1 = 2\ \mathrm{atan2}\left(-p_x \pm \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2},\ \ d_2 + p_y\right)$$

Solution Approche Algébrique

Vector ${}^{1}\mathbf{p}_p$ is defined as

$$
{}^{1}\mathbf{p}_p = \begin{bmatrix} p_x C_1 + p_y S_1 \\ -p_z \\ -p_x S_1 + p_y C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_3 S_2 \\ -d_3 C_2 \\ d_2 \end{bmatrix}
$$

From the first two elements

$$
\frac{p_x C_1 + p_y S_1}{-p_z} = \frac{d_3 S_2}{-d_3 C_2}
$$

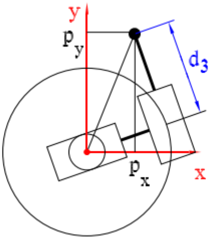
from which

$$
\theta_2 = \mathrm{atan2}\left(p_x C_1 + p_y S_1,\ p_z\right)
$$

Finally, if the first two elements are squared and added together

$$
d_3 = \sqrt{(p_x C_1 + p_y S_1)^2 + p_z^2}
$$

Solution Géométrique



Méthodes numériques

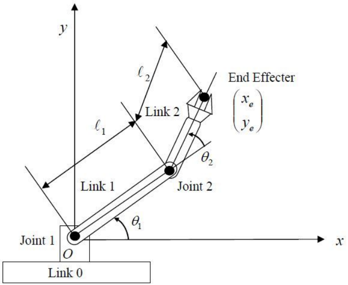
Pour une inversion numérique, on utilise un algorithme itératif: optimisation par la méthode de Gradient, Newton, Quasi-Newton, recherche linéaire du pas (backtracking),...

- MGD

$$x_e = l_1 cos\theta_1 + l_2 cos(\theta_1 + \theta_2) = f_1(\theta)$$

$$y_e = l_1 sin\theta_1 + l_2 sin(\theta_1 + \theta_2) = f_2(\theta)$$

$$X = f(\theta)$$



- Critère à minimiser

$$\min_{\theta} \|X - f(\theta)\|^2 = F(\theta)$$

- Exemple d'algorithme itératif de la plus forte pente:

$$X_{k+1} = X_k - \alpha * \nabla F(\theta)$$