

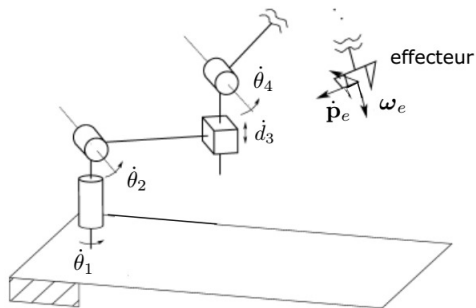
Modélisation et Commande des Robots Manipulateurs

Dr Bensalah Choukri

Université Abou Bekr Belkaid
Faculté de Technologie
Laboratoire d'Automatique

Chapitre III: Modélisation Cinématique Directe/Inverse

Modèle Cinématique Direct



Elle nous donne la relation entre les vitesses articulaires \dot{q}_i et la vitesse linéaire v_e et angulaire ω_e de l'effecteur final du robot par rapport au repère de la base. Le vecteur $\dot{\mathbf{X}} = (v_e, \omega_e)^T$ représente le **torseur cinématique**.

Définition du Jacobien

Supposons qu'on ait n fonctions $f_{i \dots n}$ de m variables $x_{1 \dots m}$:

$$\begin{aligned}y_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_m) \\y_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_m) \\&\vdots \\y_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_m)\end{aligned}$$

Les différentielles des y_i s'écrivent de la façon suivante :

$$\begin{aligned}dy_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} dx_n \\dy_2 &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n} dx_n \\&\vdots \\dy_n &= \frac{\partial f_n}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_n}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} dx_n\end{aligned}$$

Définition du Jacobien

Ceci peut être mis sous forme matricielle : $d\mathbf{Y} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X}$

La matrice $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}}$ est appelée jacobien de \mathbf{F} et a la forme suivante :

$$\mathbf{J}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

Le modèle cinématique direct décrit les m vitesses opérationnelles en fonction des n vitesses articulaires :

$$\dot{X} = J(q)\dot{q}$$

La matrice Jacobienne $J = J(q)$, de dimension $m \times n$, est définie par l'ensemble des $m \times n$ dérivées premières de f par rapport à q .

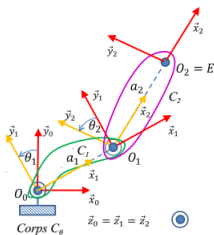
$$J(q) = \left(\frac{\partial f}{\partial q} \right) = \left[\frac{\partial f}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial q_n} \right] = [J_1, \dots, J_n]$$

Exemple

Exercice : Cas du robot plan à $n = 2$ ddl (*Two-link planar robot*)

Déterminer le MGD de ce robot : (x, y) sont les coordonnées euclidiennes de O_2 dans le plan. θ est l'angle de rotation entre (R_0) et (R_2) .

- Si $X = (x, y, \theta)^T$, combien de dérivées faut-il calculer pour obtenir le jacobien $J(q)$ de ce robot où $q = (\theta_1, \theta_2)^T$? Même question pour $X = (x, y)^T$ et pour $X = ((x, y, 0), (0, 0, \theta))^T$.
- Donnez les expressions de 0T_2 en fonction des paramètres de D-H.
- Calculer les expressions des composantes de ${}^0J(q)$ dans le repère de base (R_0) en fonction des paramètres de D-H pour ${}^0\dot{X} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta})^T$ et ${}^0\dot{X} = ((\dot{x}, \dot{y}, 0), (0, 0, \dot{\theta}))^T$.



Solution

Exercice : **Cas du robot plan à $n = 2$ ddl** (*Two-link planar robot*)

Si $X = (x, y, \theta)^T$ il y a $3 \times 2 = 6$ dérivées à calculer, $2 \times 2 = 4$ si $X = (x, y)^T$ et $6 \times 2 = 12$ pour $X = (x, y, 0, 0, 0, \theta)^T$.

$$\begin{aligned}x &= c_1 a_1 + c_{12} a_2 \\y &= s_1 a_1 + s_{12} a_2 \\ \theta &= \theta_1 + \theta_2\end{aligned} \quad {}^0T_2 = \begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta & 0 & x \\ s_\theta & c_\theta & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0J(\theta_1, \theta_2) = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} & a_2 c_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{X} = J(\theta_1, \theta_2) \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

Jacobien

- ▶ Le jacobien est l'un des outils les plus importants pour la caractérisation d'un manipulateur.
- ▶ En effet, le jacobien est utile pour:
 - ▶ Trouver les singularités
 - ▶ Analyser la redondance
 - ▶ Déterminer des algorithmes pour le modèle géométrique inverse
 - ▶ Décrire la relation entre les forces appliquées à l'effecteur et les forces résultantes au niveau des articulations ("efforts statiques")
 - ▶ Dériver les équations dynamiques du mouvement dans les deux espaces.
 - ▶ Développer des stratégies de contrôle dans l'espace opérationnel

Expressions analytique et géométrique du Jacobien

Il existe deux descriptions menant à deux différentes expressions de la matrice Jacobienne, notamment dans la partie relative à la vitesse angulaire.

► Jacobien Analytique

$$J_A(q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial q_n} \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{X} = [\dot{p}_e, \dot{\gamma}]$$

► Jacobien Géométrique

$$J_G(q) = \begin{bmatrix} J_{p_1} & \cdots & J_{p_n} \\ J_{\omega_1} & \cdots & J_{\omega_n} \end{bmatrix}$$

avec :

$$\begin{bmatrix} J_{p_i} \\ J_{\omega_i} \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} z_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix} & \text{Prismatique} \\ \begin{bmatrix} z_{i-1} \times (p_e - p_{i-1}) \\ z_{i-1} \end{bmatrix} & \text{Rotoïde} \end{cases}$$

Jacobien Géométrique

Cette expression permet de calculer le Jacobien d'une façon simple et systématique à partir du MGD basant sur la convention de D-H.

- ▶ z_{i-1} est donné par la troisième colonne de la matrice A_{i-1}^0 .
- ▶ p_e est la position de l'effecteur final (dernière colonne de A_n^0).
- ▶ p_{i-1} est donné par les trois premiers éléments du vecteur de translation de A_{i-1}^0

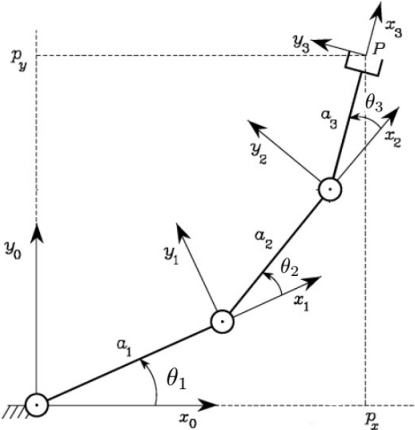
$$J_G(q) = \begin{bmatrix} J_{p_1} & \cdots & J_{p_n} \\ J_{\omega_1} & \cdots & J_{\omega_n} \end{bmatrix}$$

avec :

$$\begin{bmatrix} J_{p_i} \\ J_{\omega_i} \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} z_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix} & \text{Prismatique} \\ \begin{bmatrix} z_{i-1} \times (p_e - p_{i-1}) \\ z_{i-1} \end{bmatrix} & \text{Rotoïde} \end{cases}$$

Exemple

1 - Manipulateur planaire à 3 segments



Manipulateur planaire à 3 segments

Trois articulations rotoïdes. Le jacobien est donc:

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_0 \times (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_0) & \mathbf{z}_1 \times (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1) & \mathbf{z}_2 \times (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2) \\ \mathbf{z}_0 & \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 \end{bmatrix}$$

Les vecteurs de position des segments du robot sont:

$$\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \cos \theta_1 \\ a_1 \sin \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} a_1 \cos \theta_1 + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ a_1 \sin \theta_1 + a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} a_1 \cos \theta_1 + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + a_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ a_1 \sin \theta_1 + a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + a_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Les vecteurs unitaires des axes des articulations sont (les axes sont tous parallèles au axe z_0):

$$\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_2 = [0 \quad 0 \quad 1]^T$$

Manipulateur planaire à 3 segments

Conclusion:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} - a_3 s_{123} & -a_2 s_{12} - a_3 s_{123} & -a_3 s_{123} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_3 c_{123} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Remarque:

- Seulement les trois lignes du jacobien différentes de zéro sont importantes. Elles sont relatives aux composants de la vitesse linéaire le long des axes x_0 et y_0 , et au composant de la vitesse angulaire autour de l'axe z_0 .
- En effet, 3 DDL permettent de spécifier au maximum 3 variables de l'effecteur: v_z , ω_x , ω_y sont toujours zéro pour ce manipulateur.

Singularité

$$\text{rang}(J) \leq \min(m, n)$$

- ▶ Le rang de J n'est forcément constant.
- ▶ Si $\text{rang}(J) < \min(m, n) \Rightarrow$ Configuration singulière.
- ▶ Singularité représenté des configurations non atteignables.
- ▶ Le robot ne peut pas déplacer dans certaines directions.
- ▶ Petit déplacement de l'organe terminal peut engendre des vitesses articulaires infinies.
- ▶ Les singularités correspondent souvent à des points en limite de l'espace de travail.
- ▶ Sur les configurations singulières, les couples d'efforts limites aux articulations peuvent correspondre à des forces ou à des moments infinis sur l'organe terminal,

Exemple 1 de Singularité: Robot plan 2ddl

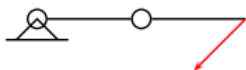
$$J = \begin{bmatrix} l_1 s_1 + l_2 s_{12} & l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \end{bmatrix}$$

$$\det(J) = l_1 l_2 s_2$$

$\Rightarrow \theta_2 = 0$ ou $\theta_2 = \pi$

\Rightarrow Le robot est complètement étendu ou rétracté

Exemple 1 de Singularité: Robot plan 2ddl



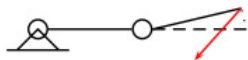
$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -a_1 S_1 - a_2 S_{12} & -a_2 S_{12} \\ a_1 C_1 + a_2 C_{12} & a_2 C_{12} \end{bmatrix}$$

Consider the velocity vector $\dot{\mathbf{x}} = [-1, -1]^T$. By computing $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{x}}$:

If $\theta_1 = 0^\circ$, $\theta_2 = 1^\circ$ then $\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -58.9 \\ 115.59 \end{bmatrix} (rad/sec) = \begin{bmatrix} -3374.7 \\ 6622.8 \end{bmatrix} (^\circ/sec)$

If $\theta_1 = 0^\circ$, $\theta_2 = 10^\circ$ then $\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -6.67 \\ 12.43 \end{bmatrix} (rad/sec) = \begin{bmatrix} -382.16 \\ 712.18 \end{bmatrix} (^\circ/sec)$

Exemple 1 de Singularité: Robot plan 2ddl

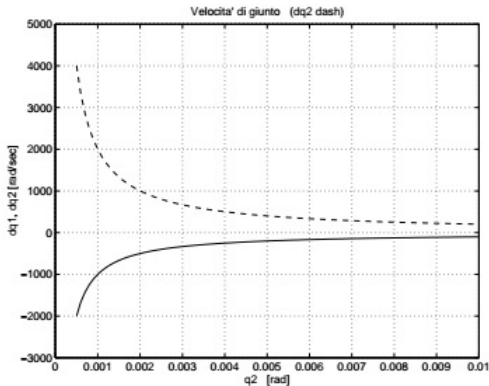


$$J(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -a_1 S_1 - a_2 S_{12} & -a_2 S_{12} \\ a_1 C_1 + a_2 C_{12} & a_2 C_{12} \end{bmatrix}$$

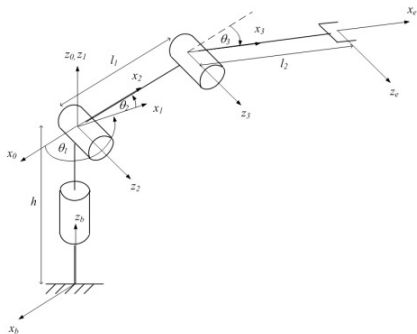
Plot of $\dot{\mathbf{q}} = J(\mathbf{q})^{-1} \dot{\mathbf{x}}$

with $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ and

$\theta_1 = 0$, $\theta_2 \in [0.0005, 0.01] \text{ rad}$



Exemple 2 de Singularité: Bras Articulé RRR



La Jacobienne du robot est définie comme suit:

$$J(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \begin{bmatrix} -s_1(l_1c_2 + l_2c_{23}) & -c_1(l_1s_2 + l_2s_{23}) & -l_2c_1s_{23} \\ c_1(l_1c_2 + l_2c_{23}) & -s_1(l_1s_2 + l_2s_{23}) & -l_2s_1s_{23} \\ 0 & l_1c_2 + l_2c_{23} & l_2c_{23} \\ 0 & s_1 & s_1 \\ 0 & -c_1 & -c_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemple 2 de Singularité: Bras Articulé RRR

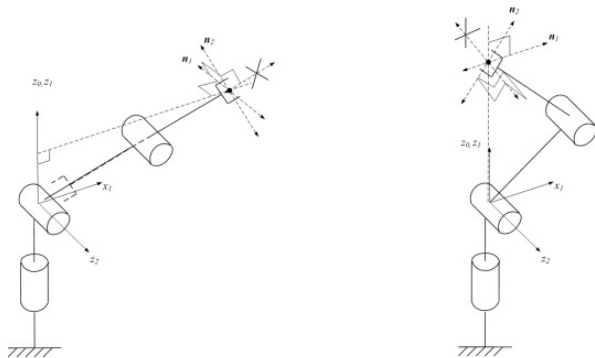
Il est clair que la jacobienne n'est pas carrée. Par contre, si la tâche opérationnelle est définie uniquement par les mouvements en translations, la jacobienne devient carrée:

$$J_v(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \begin{bmatrix} -s_1(l_1c_2 + l_2c_{23}) & -c_1(l_1s_2 + l_2s_{23}) & -l_2c_1s_{23} \\ c_1(l_1c_2 + l_2c_{23}) & -s_1(l_1s_2 + l_2s_{23}) & -l_2s_1s_{23} \\ 0 & l_1c_2 + l_2c_{23} & l_2c_{23} \end{bmatrix}.$$

$$\det(J_v(q)) = -l_1l_2s_3(l_1c_2 + l_2c_{23})$$

$$\det(J_v) = 0 \Rightarrow s_3 = 0 \text{ et/ou } l_1c_2 + l_2c_{23} = 0$$

Exemple 2 de Singularité: Bras Articulé RRR



Redondance

- ▶ Si $n > m$, le robot est dit redondant.
- ▶ Infinité de solution au problème de la cinématique inverse.
- ▶ $r = n - m$ est appelé le degré de redondance. Il est égale aussi :
$$r = n - m = n - \dim(\mathcal{R}(J)) = \dim(\mathcal{N}(J))$$
- ▶ Tâches additionnelles (butées, évitement d'obstacle, limitation de vitesse,..)

Exemple d'un robot redondant

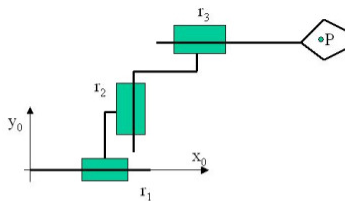


Figure 2: Manipulateur redondant 3P

$$J_v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

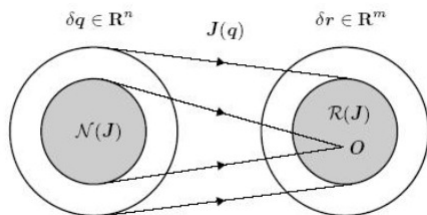
Une base de $\mathcal{R}(J)$ est :

$$R(J) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Une base de $\mathcal{N}(J)$ est :

$$N(J) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Illustration du mouvement interne



- Image ou générateur:

$$\mathcal{R}(A) = \{y/y \in \mathbb{R}^m; Ax = y; x \in \mathbb{R}^n\}$$

- Noyau: C'est le sous espace vectoriel tel que:

$$\mathcal{N}(A) = \{x/x \in \mathbb{R}^n; Ax = 0\}$$

Effort Statique

Objectif de la statique: déterminer la relation entre les forces généralisées appliquées à l'effecteur et les forces généralisées appliquées à les articulations (forces pour les art. prismatiques et couples pour les art. rotoïdes) avec les manipulateur dans une configuration d'équilibre statique

Soit:

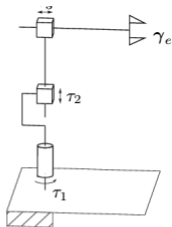
$\tau \in \mathbb{R}^{n \times 1}$: vecteur des efforts exercés par les actionneurs sur les articulations du robot

$\gamma_e \in \mathbb{R}^{r \times 1}$: vecteur des efforts agissant sur l'effecteur, où r est la dimension de l'espace opérationnel

- L'application du "Principe du Travail Virtuel", nous permet d'écrire l'équation:

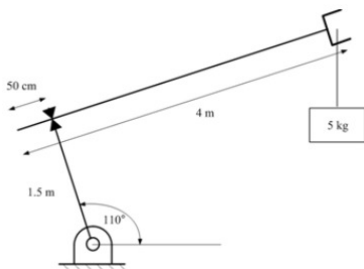
$$\tau = \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \gamma_e$$

- La **transposée du jacobien géométrique** d'un manipulateur met en relation les forces sur l'effecteur avec les forces sur les articulations



Exercise

A schematic diagram of the 2-DOF long-reach robot arm is shown in the following figure. The weights of both links are neglected. Their total lengths are 1,5 m and 4 m, respectively. At the depicted posture, where the first link is rotated by 110° and the second link is traveled by 3,5 m forward, determine the required torque and force of both actuators to maintain the configuration.



Modèle Cinématique Inverse

- ▶ La relation "directe" entre les vitesses articulaires et cartésiennes:

$$\dot{X} = J\dot{q}$$

- ▶ $\dot{X} \Rightarrow \dot{q}$ "modèle cinématique inverse (MCI)"
- ▶ Résolution du système linéaire $\dot{X} = J\dot{q}$ est cherchée.
- ▶ Dans le cas $m = n$, l'inverse de la matrice Jacobienne est exploitée.

$$\dot{q} = J^{-1}\dot{X}$$

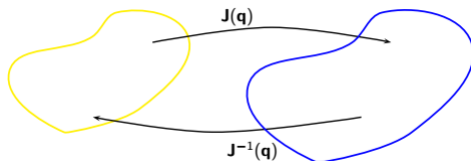
- ▶ Sinon, il est nécessaire d'utiliser le pseudo-inverse de Moore-Penrose:

$$\dot{q} = J^\dagger \dot{X}$$

avec:

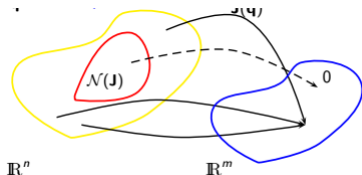
- ▶ $J^\dagger = J^T(JJ^T)^{-1}$ si $m < n$ (right pseudo-inverse)
- ▶ $J^\dagger = (J^T J)^{-1}J^T$ si $m > n$ (left pseudo inverse)

Solution de $\dot{X} = J\dot{q}$ Si $m = n$ et $\det(J) \neq 0$



l'équation $\dot{q} = J^{-1}\dot{X}$ admet une solution unique
 $\forall \dot{x}_0 \rightarrow \exists \dot{q}_0 = J^{-1}\dot{x}_0$ tel que $\dot{x}_0 = J\dot{q}_0 = JJ^{-1}\dot{x}_0$

Solution de $\dot{X} = J\dot{q}$ Si $m < n$ (redondance)



- ▶ $\text{rank}(J) = \min(m, n) = m \rightarrow \mathcal{R}(J) = \mathbb{R}^m$
- ▶ $\forall \dot{x}, \exists \dot{q}$ tel que $\dot{x} = J\dot{q}$ **multiple solutions**
- ▶ $\dot{q} = J^+ \dot{x} \exists \mathcal{N}(J)$ tel que $\forall \dot{q}_N \in \mathcal{N}(J) \rightarrow \dot{X} = J\dot{q}_N = 0$
 $\dim(\mathcal{N}(J)) = n - m$
 - ▶ $\dot{q} = J^+ \dot{x} + \dot{q}_N \rightarrow \dot{x} = J(J^+ \dot{x} + \dot{q}_N) = \dot{x}$
 - ▶ **Expression générale de la solution**
 $\dot{q} = J^+ \dot{x} + (I - J^+ J) \dot{q}_s$ ($I - J^+ J$) est une base de $\mathcal{N}(J)$
 - ▶ \dot{q}_s est une tâche additionnelle (secondaire ou mouvement interne) (additional task).

Tâche secondaire dans l'espace articulaire

La méthode consiste à projeter une tâche secondaire sur le noyau de la Jacobienne en utilisant le projecteur orthogonal $(I_d - J^+ J)$.

$$\dot{q}_N = (I_d - J^+ J)\dot{q}_s$$

Le projecteur a pour effet de supprimer la composante qui influence δX . Le vecteur $\dot{q}_s \in \mathbb{R}^n$, qui est a priori quelconque, peut servir à optimiser une performance locale. Il peut être alors déterminé comme :

$$\dot{q}_s = \alpha \nabla \phi = \alpha \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \phi}{\partial q_n} \end{pmatrix}$$

- ▶ $\alpha > 0$ conduit à une croissance de ϕ .
- ▶ $\alpha < 0$ conduit à une décroissance de ϕ .

Tâche secondaire dans l'espace articulaire

Exemples:

- ▶ Un exemple de fonction ϕ pour l'éloignement aux butées est:

$$\phi(q) = \sum \left\| \frac{q_i - q_{i_{moy}}}{\Delta q_i} \right\|^2 \text{ avec } \Delta q_i = q_i^{max} - q_i^{min}$$

- ▶ Conditionnement de J (manipulabilité):

$$\phi(q) = \sqrt{\det(J(q)J(q)^T)}$$

- ▶ Évitement d'obstacle::

$$\max \|p(q) - O\|$$

$p(q)$ n'importe quel point au long de la structure du robot et O est un point de l'obstacle.

Augmentation de l'espace opérationnel

Une autre solution consiste à étendre l'espace opérationnel en ajoutant un objectif complémentaire à celui de la tâche principal \dot{X} qui introduirait $rg(J) = n - m$ contraintes sur le mouvement.

$$J_e = \begin{bmatrix} J \\ J_N \end{bmatrix}$$

avec

$$J_N = \frac{\partial}{\partial q} (\mathcal{N}_e^T \frac{\partial \phi(q)}{\partial q})$$

Si le rang de $J_e(q)$ est $r = m = n$, alors on résout le problème cinématique inverse comme :

$$\dot{q} = J_e^{-1} \dot{X}_e$$

Passage des singularités

Dans une configuration singulière $J(q)$ n'est plus de rang plein. Sa pseudo-inverse J^+ n'est pas définie dans une telle configuration. Aussi, on utilise la pseudo-inverse pondérée qui est définie de la manière suivante.

Plutôt que de chercher la solution à $\dot{X} = J\dot{q}$ telle que $\min\|\dot{q}\|$, on détermine \dot{q} qui minimise :

$$\|J\dot{q} - \dot{X}\|^2 + \lambda^2\|\dot{q}\|^2$$

La solution optimale s'appelle **solution aux moindres carrés amortie (Damped least square)**:

$$\dot{q}_a = (J^T J + \lambda^2 I_d)^{-1} J^T \dot{X}$$

La solution se ré-écrit:

$$\dot{q}_a = J^T (J J^T + \lambda^2 I_d)^{-1} \dot{X}$$

Passage des singularités (SVD)

Une décomposition en valeurs singulières permet de comprendre comment agit la DLS par rapport à la SVD.

$$(J^T J + \lambda^2 I_d) = (U \Sigma V^T)(V \Sigma U^T) + \lambda^2 I_d = U(\Sigma^2 + \lambda^2 I_d)U^T$$

Aussi

$$J^T(J^T J + \lambda^2 I_d)^{-1} = V \underbrace{\Sigma(\Sigma^2 + \lambda^2 I_d)^{-1}} U^T = V E U^T$$

$$E = \text{diag}(e_{ii}) \text{ avec } e_{ii} = \frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \lambda^2}$$

Détermination de λ : $\frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \lambda^2} \rightarrow 0$ quand $\sigma_i \rightarrow 0$, λ doit donc être pris très grand pour maintenir les vitesses angulaires près de la singularité.

Inversement, loin des singularités λ doit rester tel que $\sigma_i \gg \lambda$ alors les composantes $\frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \lambda^2} \approx \frac{1}{\sigma_i}$

Méthodes de détermination des mouvements internes

On peut déterminer un ensemble de vecteurs orthogonaux qui forment une base du noyau de $J(q)$. Cette base est de dimension $n - r$. Elle peut être constituée des vecteurs v_i $i = r, n$ issus d'une décomposition en valeurs singulières de $J(q)$ et tel que :

$$J(q)v_i = 0, i = r, n$$

On vérifie bien pour l'exemple du manipulateur 3P que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$