المحاضرة (4) : تابع

6- خصائص و مميزات المقدرات :

المفروض أن تكون المقدرات المتحصل عليها $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ ذات معنى إحصائي ورياضي قابل للاعتماد عليه يجب أن تتوفر بها بعض الخصائص الرياضية التي تسمح لها أن تكون أكثر تمثيلا للواقع ، وتتمثل هذه الخصائص في :

1- خاصية عدم التحيز :

وهي أن يكون التوقع الرياضي للمقدرة يساوي تماما المعلمة الحقيقية $E(\hat{\beta}) = \beta$ ، $E(\hat{\alpha}) = \alpha$

1- هل $\hat{\beta}$ يتسم بخاصية عدم التحيز ؟

لدينا
$$\begin{cases} y_i = \alpha + \beta x_i + u_i & \dots (1) \\ \bar{y} = \alpha + \beta \bar{x} + \bar{u} & \dots (2) \end{cases}$$

نطرح المعادلة (2) من المعادلة (1)

$$y_i - \bar{y} = \beta (x_i - \bar{x}) + (u_i - \bar{u})$$

ونعلم أن :

$$\hat{\beta} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

نعوض $y_i - \bar{y}$ بما يساويها :

$$\hat{\beta} = \frac{\Sigma (x_i - \bar{x}) \left[\beta (x_i - \bar{x}) + (u_i - \bar{u}) \right]}{\Sigma (x_i - \bar{x})^2}$$

$$\hat{\beta} = \frac{\beta \, \Sigma \cancel{(x_i - \bar{x})^2}}{\Sigma \cancel{(x_i - \bar{x})^2}} + \frac{\Sigma (x_i - \bar{x})(u_i - \bar{u})}{\Sigma (x_i - \bar{x})^2}$$

$$\hat{\beta} = \beta + \frac{\Sigma (x_i - \bar{x}) u_i - \bar{u} \overbrace{\Sigma (x_i - \bar{x})}^{=0}}{\Sigma (x_i - \bar{x})^2}$$

$$E(\hat{\beta}) = E(\beta) + \frac{\Sigma (x_i - \bar{x}) \, E(u_i)^{=0}}{\Sigma (x_i - \bar{x})^2}$$

ونعلم أنّ $E(\beta) = \beta$ ، إذن :

$$\boxed{E(\hat{\beta}) = \beta}$$

ومنه $\hat{\beta}$ يتسم بعدم التحيز

2- هل $\hat{\alpha}$ يتسم بعدم التحيز؟

$$\begin{cases} \bar{y} = \alpha + \beta \bar{x} + \bar{u} & \cdots (1) \\ \bar{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} \bar{x} & \cdots (2) \end{cases}$$

ومنه :

$$\alpha + \beta \bar{x} + \bar{u} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} \bar{x}$$

$$\hat{\alpha} = \alpha + \beta \bar{x} - \hat{\beta} \bar{x} + \bar{u}$$

$$\hat{\alpha} = \alpha + (\beta - \hat{\beta}) \bar{x} + \bar{u}$$

$$E(\hat{\alpha}) = E(\alpha) + E(\beta - \hat{\beta})\bar{x} + E(\bar{u})$$

$$E(\hat{\alpha}) = E(\alpha) = \alpha$$

$$\boxed{E(\hat{\alpha}) = \alpha}$$

اذن α يتسم بخاصية عدم التحيز.

2 - خاصية التقارب:

تعتبر خاصية التقارب خاصية مهمة جداً، حيث في حالة توفر هذه الخاصية للمقدرة فهي تعني أيضا أن تباينها سوف يتجه إلى الصفر كلما ارتفع عدد المشاهدات، بعبارة أخرى كلما أضفنا معلومات وبيانات جديدة لعملية التقدير بحيث يقترب المجتمع المدروس للمجتمع الكلي فهذا يعني أن قيمة المقدرة تصبح أكثر تمثيلا للواقع الأمر الذي يجعل تباينها في أصغر مستوى ويؤول إلى 0، وهذا ما يعني التعبير القوي للمقدرة للواقع.

* هل $\hat{\beta}$ يتسم بالتقارب؟

نقول عن معلمة أنها متقاربة لما تكون $\lim\limits_{n \to \infty} V(\hat{\beta}) = 0$

حيث $V(\hat{\beta})$ هي تباين المعلمة $\hat{\beta}$.

لدينا: $V(\hat{\beta}) = E\left[(\hat{\beta} - \beta)^2\right]$

نعوض $\beta - \hat{\beta}$ بما يساويها :

$$V(\hat{\beta}) = E\left[\frac{\sum (x_i - \bar{x}) u_i}{\sum (x_i - \bar{x})^2}\right]^2$$

$$V(\hat{\beta}) = E\left[\underbrace{\left(\sum w_i u_i\right)^2}\right]$$ حداء شهير

حيث :

$$w_i = \frac{\sum (x_i - \bar{x})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

(لتسهيل التعامل مع المعادلة) :

$$V(\hat{\beta}) = E\left[\sum w_i^2 u_i^2 + 2 \sum w_i w_i' u_i u_i'\right]$$

من الفرضيتين :

$$\begin{cases} E(u_i^2) = V(u) \\ \quad = \delta^2(u) \\ E(u_i, u_i') = 0 \end{cases}$$ و

نجد :

$$V(\hat{\beta}) = \sum w_i^2 \delta_u^2 = \frac{\delta_u^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

بإدخال النهاية على المعادلة الأخيرة سيؤول المقام إلى مالا نهاية، بحيث كلما زادت n (عدد المشاهدات) يتجه المقام ككل إلى مالا نهاية، وقيمة البسط ثابتة اذن

$$\lim_{n \to \infty} V(\hat{\beta}) = 0$$

وبالتالي المقدرة $\hat{\beta}$ يتسم بخاصية التقارب.

- هل $\hat{\alpha}$ يتسم بالتقارب؟

بنفس الطريقة نبرهن على تقارب الحد الثابت حيث لدينا:

$$V(\hat{\alpha}) = \delta_u^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \right)$$

وعندما يؤول المقام إلى مالانهاية كلما اتجه n إلى مالانهاية، تؤول المعادلة إلى 0 وبالتالي:

$$\lim_{n \to \infty} V(\hat{\alpha}) = 0$$

$\hat{\alpha}$: يتسم بخاصية التقارب.

7- مؤشرات حساب جودة النموذج:

يتم قياس جودة النموذج بمؤشرين هما: معامل التحديد وتباين الخطأ العشوائي.

7-1- معامل التحديد:

ويقيس المدى الذي يفسره المتغير المستقل x_i المتغير التابع y_i، وتتراوح قيمته بين 0 و 1، فكلما اقترب من 1 نقول أن x_i يفسر نسبة كبيرة من التغيرات التي تحدث في المتغير التابع y_i، والعكس صحيح.

وهو يمثل النسبة بين مجموع مربعات الانحدار SSR

ومجموع المربعات الكلي SST

حيث :

$$\boxed{R^2 = \frac{SSR}{SST}}$$

SST : هو مجموع المربعات الكلي والتي تحدث في المتغير التابع وتتكون هنا :

$$SST = SSR + SSE$$

$$\Sigma (y_i - \bar{y})^2 = \Sigma (\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \Sigma u_i^2$$

SSR : مجموع مربعات الانحدار ، هو جزء من تباين قيمة المتغير الذي تم تفسيره بواسطة الانحدار:

أي جزء من التغيرات التي تحدث في المتغير التابع والذي تم تفسيره بواسطة النموذج المقدر.

$$SSR = \Sigma (\hat{y}_i - \bar{y})^2$$

SSE : مجموع مربعات الأخطاء ، وهو الجزء الذي فشل النموذج في تفسيره

$$SSE = \Sigma u_i^2$$

وبالتالي:

$$R^2 = \frac{SSR}{SST}$$

$$R^2 = \frac{\Sigma(\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\Sigma(y_i - \bar{y})^2} = \frac{\Sigma(y_i - \bar{y}) - \Sigma u_i^2}{\Sigma(y_i - \bar{y})^2}$$

$$R^2 = 1 - \frac{\Sigma u_i^2}{\Sigma(y_i - \bar{y})^2}$$

أو يمكن كتابته بالشكل التالي:

$$R^2 = 1 - \frac{SSE}{SST}$$

* كما يمكن حساب معامل التحديد وفق علاقتين أخريين كما:

$$R^2 = \frac{\hat{\beta}\, \Sigma(x_i - \bar{x})^2}{\Sigma(y_i - \bar{y})^2}$$

$$R^2 = \frac{[\Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})]^2}{\Sigma(x_i - \bar{x})^2\, \Sigma(y_i - \bar{y})^2}$$

وفي حالة إدخال الجذر التربيعي على العلاقة الأخيرة نتحصل على:

$$R = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\sum (y_i - \bar{y})^2}} = r_{x,y}$$

$r_{x,y}$ = معامل الارتباط

في هذه الحالة، بما أن المتغير التابع في ظل نموذج الانحدار الخطي البسيط، يتبع متغير مستقل واحد، هذا يعني أن معامل التحديد الذي يشرح تغيرات وانحرافات المتغير التابع مبني على تغيرات وانحرافات متغير مستقل واحد،

ففي هذه الحالة معامل التحديد هو نفسه مربع معامل الارتباط: $R^2 = r^2_{x,y}$

✓ معامل الارتباط الخطي:

يمكن حسابه بالعلاقة السابقة، ونميز 9 حالات لمعامل الارتباط.

- $r_{x,y} = 1$: ارتباط موجب تام
- $1 > r_{x,y} > 0,7$: ارتباط موجب قوي
- $0,7 > r_{x,y} > 0,3$: ارتباط موجب متوسط القوة
- $0,3 > r_{x,y} > 0$: " موجب ضعيف

- $r_{x,y}=0$: لا يوجد ارتباط.
- $0 > r_{x,y} > -0,3$: ارتباط سالب ضعيف
- $-0,3 > r_{x,y} > -0,7$: ارتباط سالب متوسط القوة
- $-0,7 > r_{x,y} > -1$: ارتباط سالب قوي
- $r_{x,y}=-1$: ارتباط سالب تام

7 - 2 - تباين الخطأ العشوائي :

تقدير المربعات الصغرى لتباين الخطأ العشوائي هو $\hat{\sigma}_u^2$

ويحسب بالمعادلة التالية.

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{\sum u_i^2}{n-2} = \frac{\sum (y_i - \hat{y})^2}{n-2}$$

يقيس هذا المؤشر مدى انحراف القيم الفعلية عن القيم المقدرة. فإذا كان هذا التقدير كبير فإن انحرافات القيم الفعلية للمتغير التابع عن القيم المقدرة لها كبير أي أن النموذج غير كفؤ.