Application BAEP 1

Flexion composée – Diagramme d'interaction
Exemple d'un poteau

On considère un poteau carré de 60 cm de côté en béton C50.
Les efforts à l'ELU qui s'appliquent sur ce poteau sont N = 3,2MN et M = 1,0 MN.m.

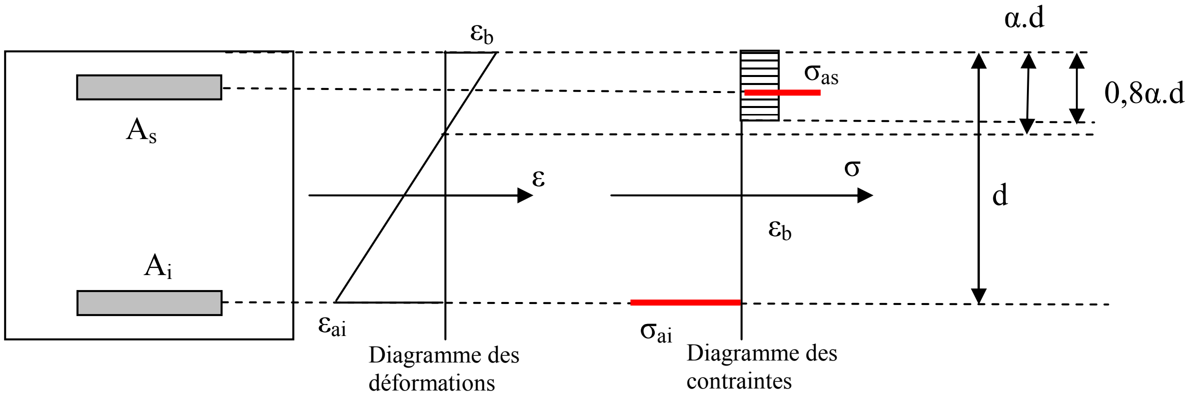
Hypothèses :
- On utilisera la branche horizontale du diagramme contraintes-déformations de l'acier.
- Le centre de gravité des aciers est positionné à 6 cm du bord de la section (c=6cm).

1) Déterminer le ferraillage dissymétrique du poteau par la méthode d'assimilation à la flexion simple.
2) Déterminer le ferraillage symétrique du poteau et en déduire le ferraillage pratique.
3) A partir du ferraillage pratique déterminé à la question 2), déterminer le diagramme d'interaction du poteau.

Indications : Pour la question 3), on pourra calculer les efforts N et M correspondants aux diagrammes de déformation du tableau suivant :

ε_{ai}	ε_b	N	M
-45 ‰	-45 ‰		
-45 ‰	3,5 ‰		
-10 ‰	3,5 ‰		
-3,5 ‰	3,5 ‰		
0,35 ‰	3,5 ‰		
2 ‰	2 ‰		

Rappels :



1) Détermination du ferraillage dissymétrique par la méthode d'assimilation à la flexion simple.

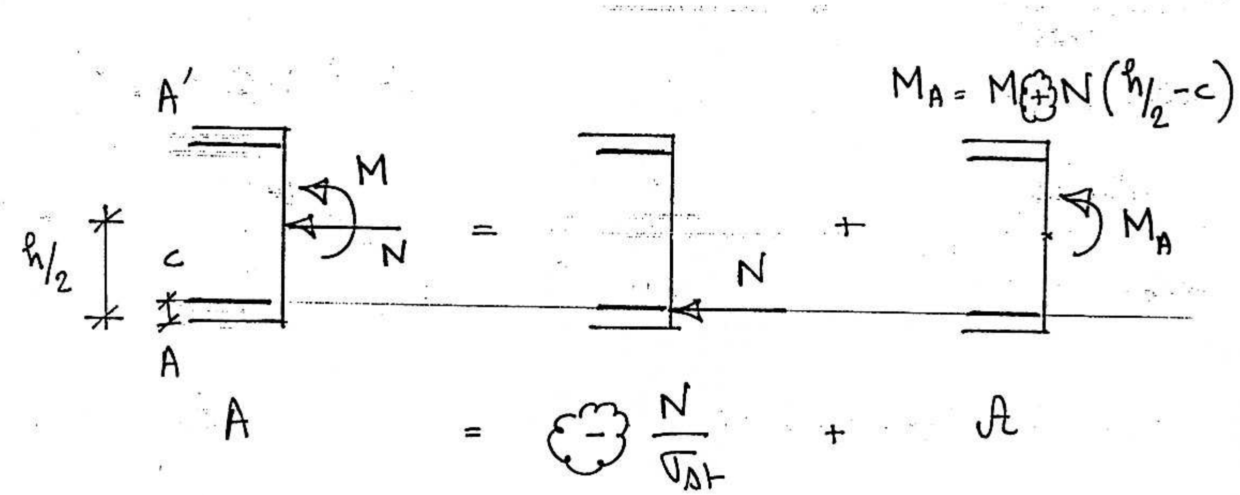
Excentricité : $e = \dfrac{M}{N} = 0{,}313\ m \geq \dfrac{h}{6}$ $\Rightarrow$ la section est partiellement comprimée.

Béton C50 => $\boldsymbol{f_{cd} = \dfrac{f_{ck}}{\gamma_c} = \dfrac{50}{1{,}5} = 33{,}3\ MPa}$

Branche horizontale du diagramme de l'acier => $\boldsymbol{f_{yd} = \dfrac{f_{yk}}{\gamma_s} = \dfrac{500}{1{,}15} = 435\ MPa}$

Aciers situés à 6 cm du bord de la section => d = h-c = 0,54m

FLEXION COMPOSEE AVEC COMPRESSION



a) Calcul du moment par rapport aux aciers tendus.

$$\boldsymbol{M_A = M + N.\left(\frac{h}{2} - c\right) = 1{,}0 + 3{,}2.\left(\frac{0{,}6}{2} - 0{,}06\right) = 1{,}768\ MN.m}$$

b) On calcule la section d'acier nécessaire pour équilibrer le moment M_A (calcul en flexion simple).

$$\boldsymbol{\mu = \frac{M_A}{b.d^2.f_{cd}} = \frac{1{,}768}{0{,}6 \times 0{,}54^2 \times 33{,}3} = 0{,}303}$$ => Pivot B

$$\boldsymbol{\alpha = 1{,}25.\left(1 - \sqrt{(1 - 2.\mu)}\right) = 1{,}25.\left(1 - \sqrt{(1 - 2 \times 0{,}303)}\right) = 0{,}465}$$

$$\boldsymbol{\mathscr{A} = \frac{M_A}{(d - 0{,}4.\alpha d).f_{yk}} = \frac{1{,}768}{(0{,}54 - 0{,}4 \times 0{,}465 \times 0{,}54).435} = 92{,}4\ cm^2}$$

$\varepsilon_b = 3{,}5$ ‰
$\varepsilon_{st} = (1-\alpha)/\alpha.3{,}5$ ‰
$= 4{,}03$ ‰

=> $\sigma_{st} = 435$ MPa

c) On en déduit la section nécessaire pour reprendre la flexion composée.

$$\boxed{\boldsymbol{A = \mathscr{A} - \frac{N}{f_{yd}} = 92{,}4.10^{-4} - \frac{3{,}2}{435} = 18{,}9\ cm^2}}$$

2) **Détermination du ferraillage symétrique.**

a) On écrit l'équilibre au centre de gravité de la section

$$\begin{cases} \boldsymbol{N = N_{A_s} + N_{A_i} + N_b = A.\sigma_{sts} + A.\sigma_{sti} + 0{,}8.\alpha.d.b.f_{cd}} \\ \boldsymbol{M = M_{A_s} + M_{A_i} + M_b = A.\sigma_{sts}.\left(\frac{h}{2} - c\right) + A.\sigma_{sti}\left(-\frac{h}{2} + c\right) + 0{,}8.\alpha.d.b.f_{cd}\left(\frac{h}{2} - 0{,}4.\alpha.d\right)} \end{cases}$$

b) On fait l'hypothèse (1) que les aciers supérieurs sont comprimés et ont atteint leur limite d'élasticité et que les aciers inférieurs sont tendus et ont atteint leur limite d'élasticité.

On a donc $\boldsymbol{\sigma_{sts} = -\sigma_{sti} = 435\ MPa}$

On en déduit $\boldsymbol{N = N_b = 0{,}8.\alpha.d.b.f_{cd}}$ et donc

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{N}{0{,}8.d.b.f_{cd}} = \frac{3{,}2}{0{,}8 \times 0{,}54 \times 0{,}6 \times 33{,}3} = 0{,}371}$$

c) On vérifie l'hypothèse (1)

αd = 0,2 m > c=0,06m => les aciers supérieurs sont en compression.

$$\varepsilon_{as} = \varepsilon_b \frac{\alpha.d - c}{\alpha.d} = 0{,}0035 \frac{0{,}2 - 0{,}06}{0{,}2} = 2{,}45‰ > \frac{f_{yd}}{E_S} = 2{,}17‰$$

Les aciers supérieurs ont bien atteint la limite d'élasticité et travaillent donc à 435 MPa.

$$\varepsilon_{ai} = \varepsilon_b \frac{\alpha.d - d}{\alpha.d} = 0{,}0035 \frac{0{,}2 - 0{,}54}{0{,}2} = -5{,}95‰ < -\frac{f_{yd}}{E_S} = -2{,}17‰$$

Les aciers inférieurs sont tendus et ont bien atteint la limite d'élasticité et travaillent donc à 435 MPa.

d) On calcule la section d'acier

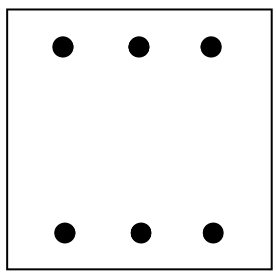
$$M = M_{A_q} + M_{Ai} + M_b = 2.A.f_{yd}.\left(\frac{h}{2} - c\right) + N.\left(\frac{h}{2} - 0{,}4.\alpha.d\right)$$

$$\boxed{A = \frac{M - N.\left(\frac{h}{2} - 0{,}4.\alpha.d\right)}{2.f_{yd}.\left(\frac{h}{2} - c\right)} = \frac{1 - 3{,}2.\left(\frac{0{,}6}{2} - 0{,}4 \times 0{,}371 \times 0{,}54\right)}{2 \times 435 \times \left(\frac{0{,}6}{2} - 0{,}06\right)} = 14{,}17\ cm^2}$$

e) On détermine le ferraillage pratique

Barre	**Section**	**Ferraillage pratique pour 14.17 cm²**	
HA 8	0.503 cm²	29 barres	soit 14.58 cm²
HA 10	0.785 cm²	19 barres	soit 14.92 cm²
HA 12	1.131 cm²	13 barres	soit 14.70 cm²
HA 14	1.539 cm²	10 barres	soit 15.39 cm²
HA 16	2.011 cm²	8 barres	soit 16.08 cm²
HA 20	3.142 cm²	5 barres	soit 15.71 cm²
HA 25	4.909 cm²	3 barres	soit 14.73 cm²
HA 32	8.042 cm²	2 barres	soit 16.08 cm²

3 HA25

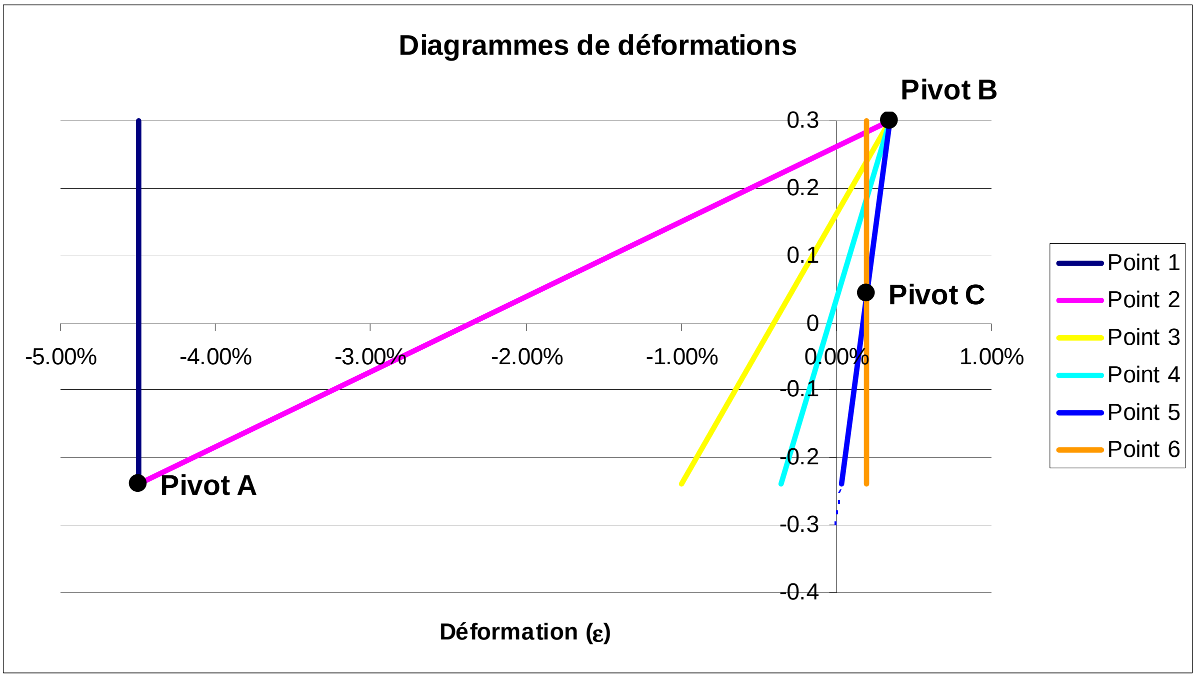


3 HA25

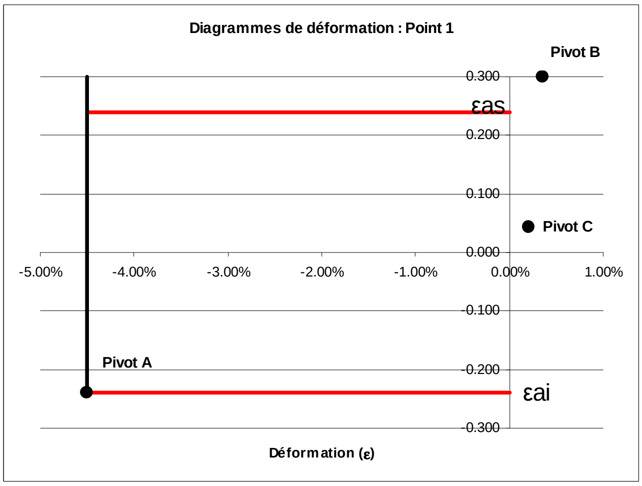
3) Construction du diagramme d'interaction.

On utilise le ferraillage pratique déterminé ci-dessus : $A_i = A_s = 14{,}73\ cm^2$
On calcule les points suivants du diagramme d'interaction

Point	ε_{ai}	ε_b	N	M
Point 1	-45 ‰	-45 ‰		
Point 2	-45 ‰	3,5 ‰		
Point 3	-10 ‰	3,5 ‰		
Point 4	-3,5 ‰	3,5 ‰		
Point 5	0,35 ‰	3,5 ‰		
Point 6	2 ‰	2 ‰		



a) Point 1 - Pivot A



La section est entièrement tendue.
Le béton ne travaille pas.
Les aciers supérieurs et inférieurs ont une déformation de -45 ‰ et ont donc atteint leur limite d'élasticité. Ils travaillent donc à 435 MPa.

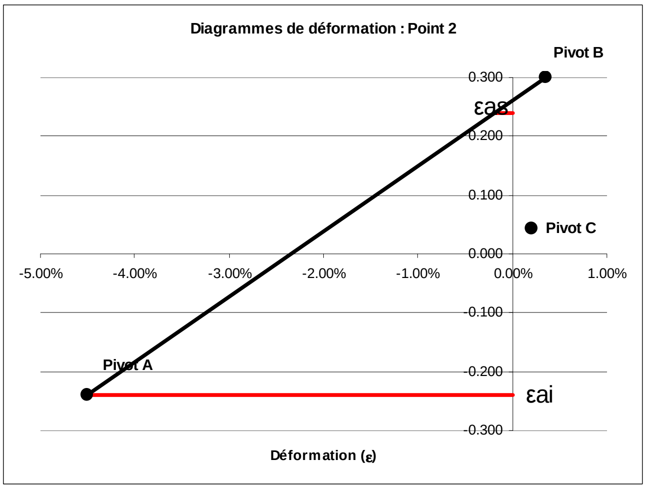
On en déduit :

$$\begin{cases} N = -2.A.f_{yd} = -2 \times 14{,}73.10^{-4} \times 435 = -1{,}281\ MN \\ M = A.f_{yd}.\left(\dfrac{h}{2} - c\right) + A.f_{yd}.\left(-\dfrac{h}{2} + c\right) = 0\ MN.m \end{cases}$$

b) Point 2 - Pivot A-B

i) On calcule la hauteur comprimée αd

$$\alpha d = d\frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_b - \varepsilon_{ai}} = 0,54\frac{0,35}{0,35+4,5} = 0,039\ m$$



ii) On calcule la déformation des aciers supérieurs

Ceux-ci sont situés à 6cm du bord de la section. La hauteur comprimée étant de 3,9cm, on en déduit que les aciers supérieurs sont tendus.

$$\varepsilon_{as} = \varepsilon_b\frac{\alpha.d - c}{\alpha.d} = 0,0035\frac{0,039-0,06}{0,039} = -1,88‰ > -\frac{f_{yd}}{E_S} = -2,17‰$$

Les aciers supérieurs sont dans le domaine élastique

iii) On calcule les contraintes dans les aciers

On a ε_{ai} = -45 ‰. Les aciers inférieurs sont donc tendus et plastifiés et σ_{ai} = 435 MPa

Les aciers supérieurs sont dans le domaine élastique, on a donc

$$\sigma_{as} = \varepsilon_{as}.E_s = 0,00188\times 200000 = 376\ MPa$$

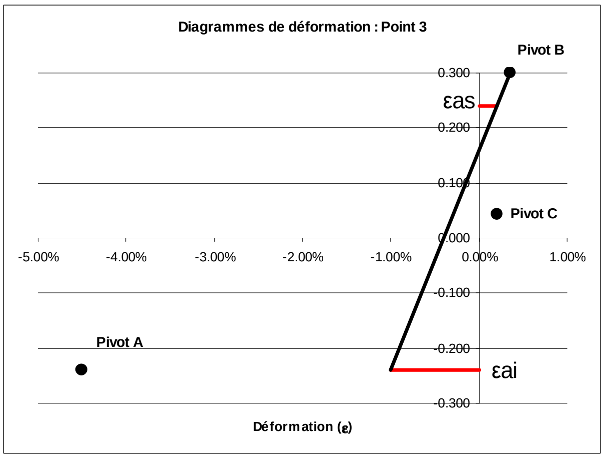
iv) On calcule les efforts N et M

$$\begin{cases} N = N_{A_s} + N_{A_i} + N_b = -A.\sigma_{as} - A.\sigma_{ai} + 0,8.\alpha.d.b.f_{cd} \\ \quad = -14,73.10^{-4}\times 376 - 14,73.10^{-4}\times 435 + 0,8\times 0,039\times 0,6\times 33,3 = -0,571\ MN \\ \\ M = M_{A_s} + M_{A_i} + M_b = -A.\sigma_{as}.\left(\frac{h}{2}-c\right) - A.\sigma_{ai}.\left(-\frac{h}{2}+c\right) + 0,8.\alpha.d.b.f_{cd}\left(\frac{h}{2}-0,4.\alpha d\right) \\ \quad = -14,73.10^{-4}\times 376\left(\frac{0,6}{2}-0,06\right) - 14,73.10^{-4}\times 435\left(-\frac{0,6}{2}+0,06\right) \\ \quad\quad + 0,8\times 0,039\times 0,6\times 33,3\left(\frac{0,6}{2}-0,4\times 0,039\right) = 0,198\ MN.m \end{cases}$$

c) Point 3 - Pivot B

i) On calcule la hauteur comprimée αd

$$\alpha d = d\,\frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_b - \varepsilon_{ai}} = 0,54\,\frac{0,35}{0,35+1,0} = 0,14\ m$$



ii) On calcule la déformation des aciers supérieurs

Ceux-ci sont situés à 6cm du bord de la section. La hauteur comprimée étant de 14cm, on en déduit que les aciers supérieurs sont comprimés.

$$\varepsilon_{as} = \varepsilon_b \frac{\alpha.d - c}{\alpha.d} = 0{,}0035\frac{0{,}14-0{,}06}{0{,}14} = 2{,}0‰ < \frac{f_{yd}}{E_S} = 2{,}17‰$$

Les aciers supérieurs sont dans le domaine élastique

iii) On calcule les contraintes dans les aciers

On a ε_{ai} = -10 ‰. Les aciers inférieurs sont donc tendus et plastifiés et σ_{ai} = 435 MPa

Les aciers supérieurs sont dans le domaine élastique, on a donc

$$\sigma_{as} = \varepsilon_{as}.E_s = 0,002\times 200000 = 400\ MPa$$

iv) On calcule les efforts N et M

$$\begin{cases} N = N_{A_s} + N_{A_i} + N_b = A.\sigma_{as} - A.\sigma_{ai} + 0,8.\alpha.d.b.f_{cd} \\ \quad = 14,73.10^{-4}\times 400 - 14,73.10^{-4}\times 435 + 0,8\times 0,14\times 0,6\times 33,3 = 2,186\ MN \\ M = M_{A_s} + M_{A_i} + M_b = A.\sigma_{as}.\left(\frac{h}{2}-c\right) - A.\sigma_{ai}.\left(-\frac{h}{2}+c\right) + 0,8.\alpha.d.b.f_{cd}\left(\frac{h}{2}-0,4.\alpha d\right) \\ \quad = 14,73.10^{-4}\times 400\left(\frac{0,6}{2}-0,06\right) - 14,73.10^{-4}\times 435\left(-\frac{0,6}{2}+0,06\right) \\ \quad + 0,8\times 0,14\times 0,6\times 33,3\left(\frac{0,6}{2}-0,4\times 0,14\right) = 0,841\ MN.m \end{cases}$$

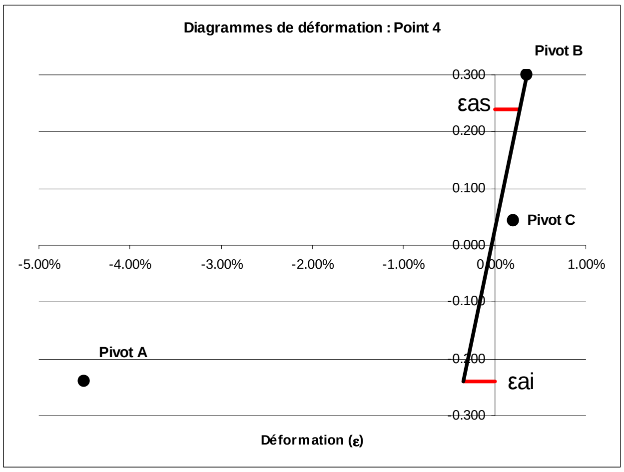
d) Point 4 - Pivot B

i) On calcule la hauteur comprimée αd

$$\alpha d = d\frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_b - \varepsilon_{ai}} = 0{,}54\frac{0{,}35}{0{,}35+0{,}35} = 0{,}27\ m$$

ii) On calcule la déformation des aciers supérieurs

Ceux-ci sont situés à 6cm du bord de la section. La hauteur comprimée étant de 27cm, on en déduit que les aciers supérieurs sont comprimés.



$$\varepsilon_{as} = \varepsilon_b\frac{\alpha.d - c}{\alpha.d} = 0{,}0035\frac{0{,}27-0{,}06}{0{,}27} = 2{,}72‰ > \frac{f_{yd}}{E_S} = 2{,}17‰$$

Les aciers supérieurs sont dans le domaine plastique

iii) On calcule les contraintes dans les aciers

On a ε_{ai} = -3,5 ‰. Les aciers inférieurs sont donc tendus et plastifiés et σ_{ai} = 435 MPa
Les aciers supérieurs sont dans le domaine plastique, on a donc σ_{as} = 435 MPa

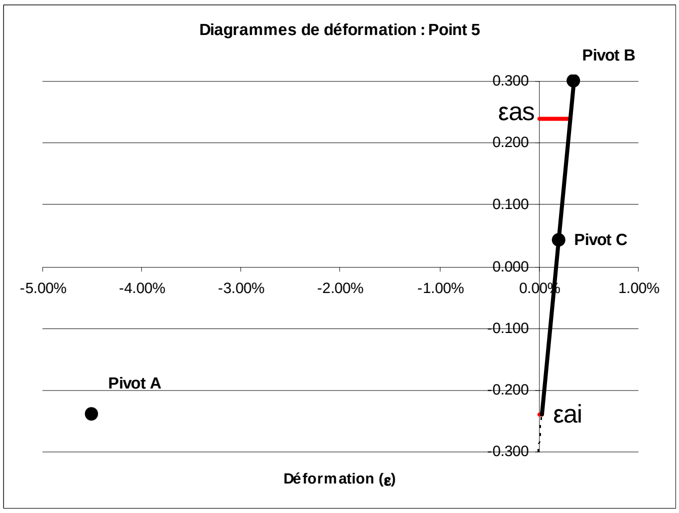
iv) On calcule les efforts N et M

$$\begin{cases} N = N_{A_s} + N_{A_i} + N_b = A.\sigma_{as} - A.\sigma_{ai} + 0{,}8.\alpha.d.b.f_{cd} \\ \quad = 14{,}73.10^{-4}\times 435 - 14{,}73.10^{-4}\times 435 + 0{,}8\times 0{,}27\times 0{,}6\times 33{,}3 = 4{,}316\ MN \\ M = M_{A_s} + M_{A_i} + M_b = A.\sigma_{as}.\left(\frac{h}{2} - c\right) - A.\sigma_{ai}.\left(-\frac{h}{2} + c\right) + 0{,}8.\alpha.d.b.f_{cd}\left(\frac{h}{2} - 0{,}4.\alpha d\right) \\ \quad = 14{,}73.10^{-4}\times 435\left(\frac{0{,}6}{2} - 0{,}06\right) - 14{,}73.10^{-4}\times 435\left(-\frac{0{,}6}{2} + 0{,}06\right) \\ \quad\quad + 0{,}8\times 0{,}27\times 0{,}6\times 33{,}3\left(\frac{0{,}6}{2} - 0{,}4\times 0{,}27\right) = 1{,}136\ MN.m \end{cases}$$

e) <u>Point 5 - Pivot B-C</u>

i) On calcule la hauteur comprimée αd

$$\alpha d = d\frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_b - \varepsilon_{ai}} = 0{,}54\frac{0{,}35}{0{,}315} = 0{,}6\ m$$



ii) On calcule la déformation des aciers supérieurs

Ceux-ci sont situés à 6cm du bord de la section. La section étant totalement comprimée, on en déduit que les aciers supérieurs sont comprimés.

$$\varepsilon_{as} = \varepsilon_b\frac{\alpha.d - c}{\alpha.d} = 0{,}0035\frac{0{,}60-0{,}06}{0{,}60} = 3{,}15‰ > \frac{f_{yd}}{E_S} = 2{,}17‰$$

Les aciers supérieurs sont dans le domaine plastique

iii) On calcule les contraintes dans les aciers

On a $\varepsilon_{ai} = 0{,}35$ ‰. Les aciers inférieurs sont dans le domaine élastique et $\sigma_{ai} = 70$ MPa

Les aciers supérieurs sont dans le domaine plastique, on a donc $\sigma_{as} = 435$ MPa

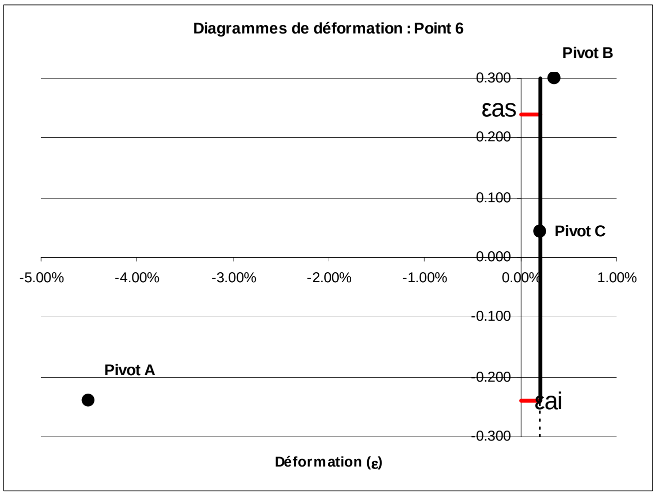
iv) On calcule les efforts N et M

$$\begin{cases} N = N_{A_s} + N_{Ai} + N_b = A.\sigma_{as} + A.\sigma_{ai} + 0{,}8.\alpha.d.b.f_{cd} \\ \quad = 14{,}73.10^{-4}\times 435 - 14.73.10^{-4}\times 70 + 0{,}8\times 0{,}60\times 0{,}60\times 33{,}3 = 10{,}334\ MN \\ \\ M = M_{A_s} + M_{Ai} + M_b = A.\sigma_{as}.\left(\frac{h}{2} - c\right) + A.\sigma_{ai}.\left(-\frac{h}{2} + c\right) + 0{,}8.\alpha.d.b.f_{cd}.\left(\frac{h}{2} - 0{,}4.\alpha d\right) \\ \quad = 14{,}73.10^{-4}\times 435.\left(\frac{0{,}6}{2} - 0{,}06\right) + 14.73.10^{-4}\times 70.\left(-\frac{0{,}6}{2} + 0{,}06\right) \\ \quad + 0{,}8\times 0{,}60\times 0{,}60\times 33{,}3.\left(\frac{0{,}6}{2} - 0{,}4\times 0{,}6\right) = 0{,}704\ MN.m \end{cases}$$

f) <u>Point 6 - Pivot C</u>

La section est entièrement comprimée.
La totalité de la section de béton travaille à 33,3 MPa.
Les aciers supérieurs et inférieurs ont une déformation de 2 ‰ et sont donc dans le domaine élastique et

$$\sigma_{ai} = \sigma_{as} = \varepsilon_{as}.E_s = 0,002 \times 200000 = 400\ MPa$$

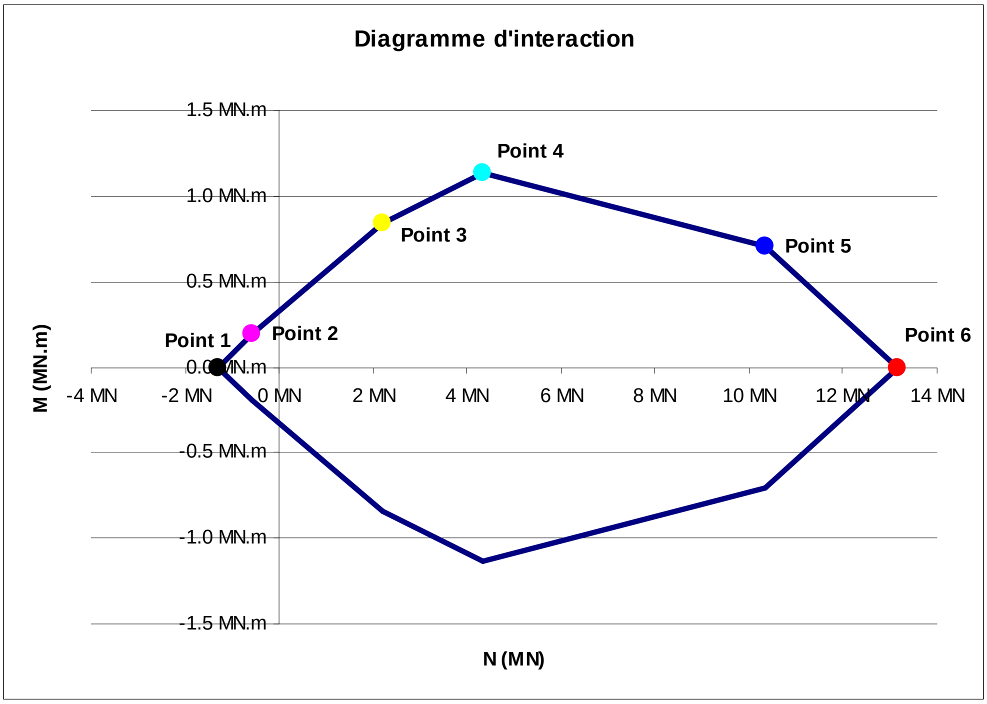


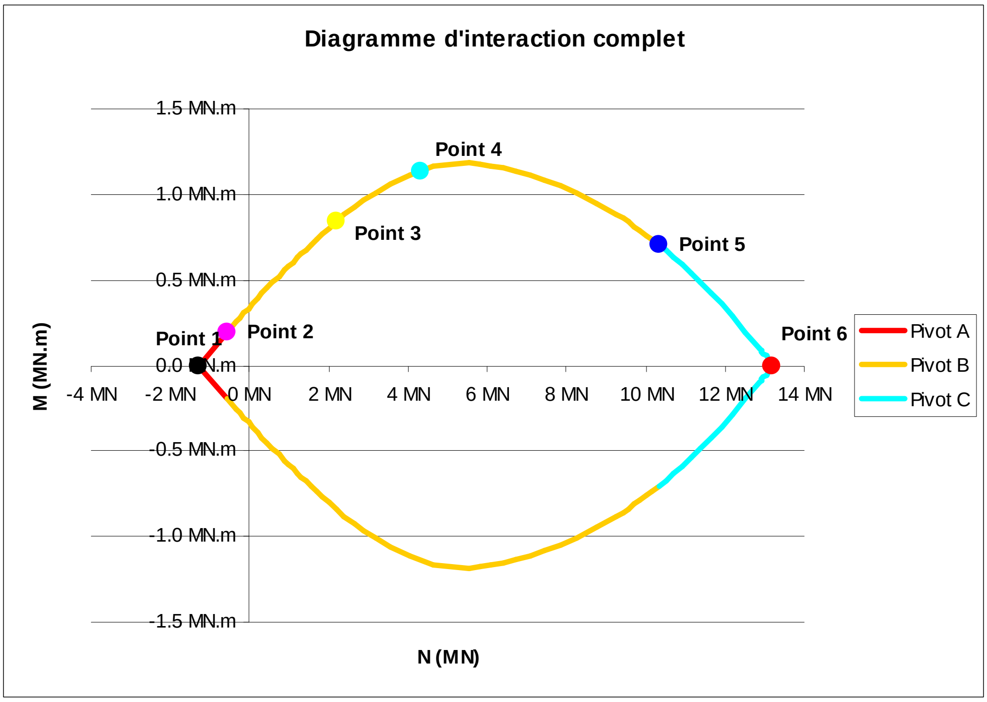
On en déduit :

$$\begin{cases} N = N_{A_s} + N_{A_i} + N_b = A.\sigma_{as} + A.\sigma_{ai} + 0,8.\alpha.d.b.f_{cd} \\ \qquad = 14,73.10^{-4} \times 400 + 14,73.10^{-4} \times 400 + 0,6 \times 0,6 \times 33,3 = 13,166\ MN \\ \\ M = 0 \end{cases}$$

g) Récapitulation des points calculés

Point	ε_{ai}	ε_b	N	M
Point 1	-4.50%	-4.50%	-1.281 MN	0.000 MN.m
Point 2	-4.50%	0.35%	-0.574 MN	0.197 MN.m
Point 3	-1.00%	0.35%	2.187 MN	0.841 MN.m
Point 4	-0.35%	0.35%	4.316 MN	1.136 MN.m
Point 5	0.035%	0.35%	10.334 MN	0.704 MN.m
Point 6	0.20%	0.20%	13.166 MN	0.000 MN.m





Exemple de feuille de calcul