Université Aboubakr Belkaid
Faculté de Technologie,
Département de génie électrique et électronique
Licence 3

Asservissements continus et régulation

Chargée de module:
Mme BENMANSOUR. S

Université Aboubakr Belkaid
Faculté de Technologie,
Département de génie électrique et électronique
Licence 3

Asservissements continus et régulation

Cours 2: Modélisation des systèmes continus LTI

Chargée de module:
Mme BENMANSOUR. S

Contenu du cours II

1. *Caractéristique d'un système*
2. *Les signaux d'entrée particuliers*
3. *Schémas fonctionnels*
4. *Fonction de transfert*
5. *Analyse d'un système asservis*

Contenu du cours II

1. ***Caractéristique d'un système***
2. *Les signaux d'entrée particuliers*
3. *Schémas fonctionnels*
4. *Fonction de transfert*
5. *Analyse d'un système asservis*

Caractéristique d'un système

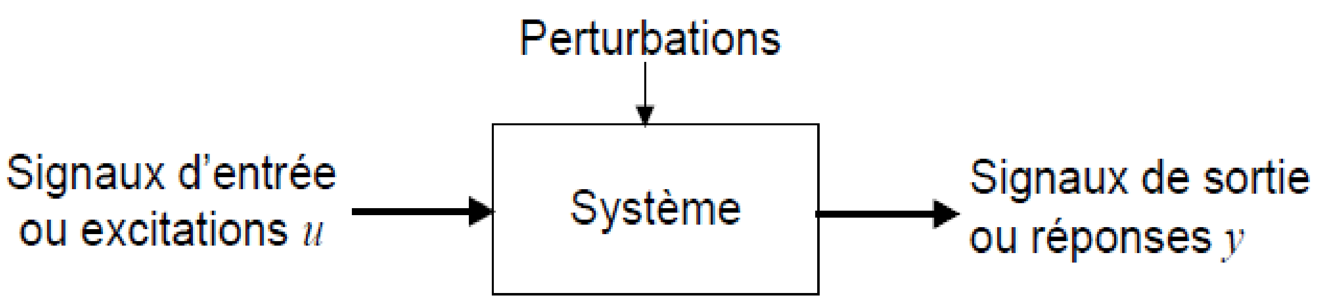
1. Qu'est-ce qu'un système?

Système **: ensemble d'objets interagissant entre eux pour réaliser une fonction. Il est connecté au monde extérieur à travers :**

- ***ses entrées***

  - ***Signaux d'excitation (consigne)*** **: actions envoyées au système**
  - ***Perturbations*** **qui sont en général imprévisibles**

- ***ses sorties : réponses du système aux signaux d'entrée***



Caractéristique d'un système

2. Modélisation d'un système

➢ L'étude ou **la modélisation** d'un système nécessite la connaissance :
- de ***la nature des signaux d'entrée et de sortie*** (déterministes, aléatoires, à temps continu, à temps discret…
-des ***caractéristiques du système:*** la nature, l'invariance, la linéarité… pour concevoir un modèle « utile »

➢ **Un modèle** « utile » obtenu = au moins 75% du travail!

➢ La construction d'un **modèle** se fait par deux moyens:
- A partir de la connaissance a priori du système (Lois de la Physique) -> ***Modèle de connaissance***
- A partir d'expériences réalisées sur le système (Identification) -> ***Modèle de représentation***

Caractéristique d'un système

3. Que fait-on avec un modèle?

➢ **Analyse**

- Etude du système en BO (boucle ouverte)ou en BF(boucle fermée)

-Elaboration des propriétés du système (stabilité, précision,…)

➢ **Synthèse**

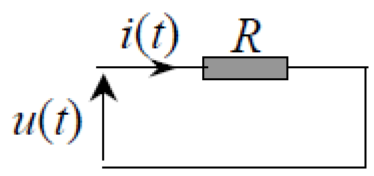
- Créer des lois de commande suivant un cahier des charges (CC) en termes de stabilité, de précision, de régulation, de poursuite, ….

Caractéristique d'un système

4. Classification des systèmes

➢ **Système statique**

La réponse du système à une excitation est instantanée

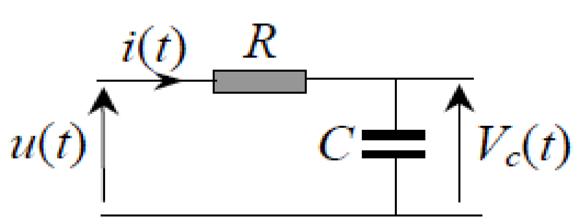


Equation

$$y(t) = i(t) = \frac{1}{R} u(t)$$

➢ **Système dynamique**

La réponse est en fonction de l'excitation et des réponses passées



Equation

$$RC\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

avec $y(t) = V_c(t)$

Caractéristique d'un système

4. Classification des systèmes

➢ **Systèmes continu et discret**

- *Continu* : l'information circule à tout instant de façon continue

$$RC\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

- *Discret* ou numérique : l'information circule à des instants discrets

$$RCy(k+1) + (1-RC)y(k) = u(k)$$

Caractéristique d'un système

4. Classification des systèmes

➢ Systèmes linéaires et non linéaires

- **Le système est *linéaire* s'il satisfait le principe de superposition**

Si $y_i(t)$ est la réponse du système à l'entrée $u_i(t)$ alors la réponse du système à $u(t)=\sum_i \alpha_i u_i(t)$ est $y(t)=\sum_i \alpha_i y_i(t)$

- **Le système est *non-linéaire* dans le cas contraire**

➢ Système causal

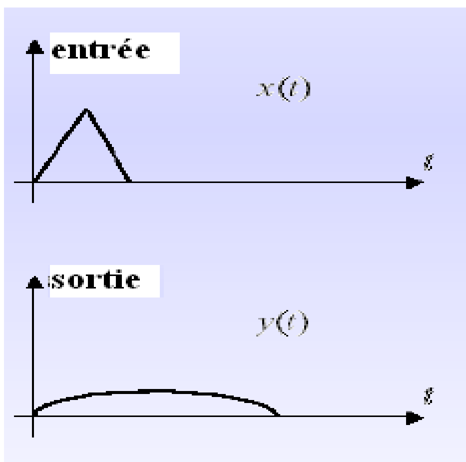
La réponse temporelle du système ne peut précéder son entrée

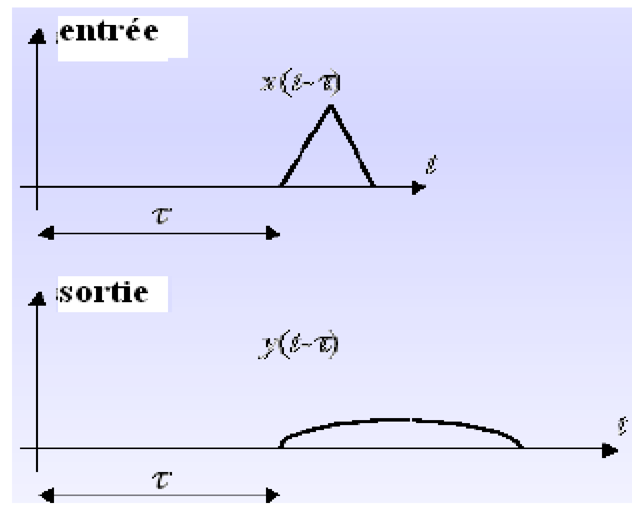
Caractéristique d'un système

4. Classification des systèmes

➢ Système invariant

-Un système est dit *invariant* ssi ses caractéristiques ne se modifient pas dans le temps.





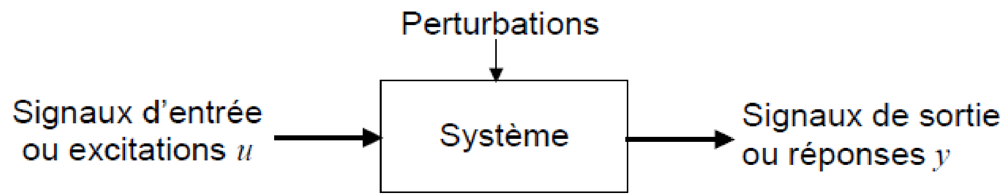
Dans la suite, on étudiera les systèmes *continus LTI*

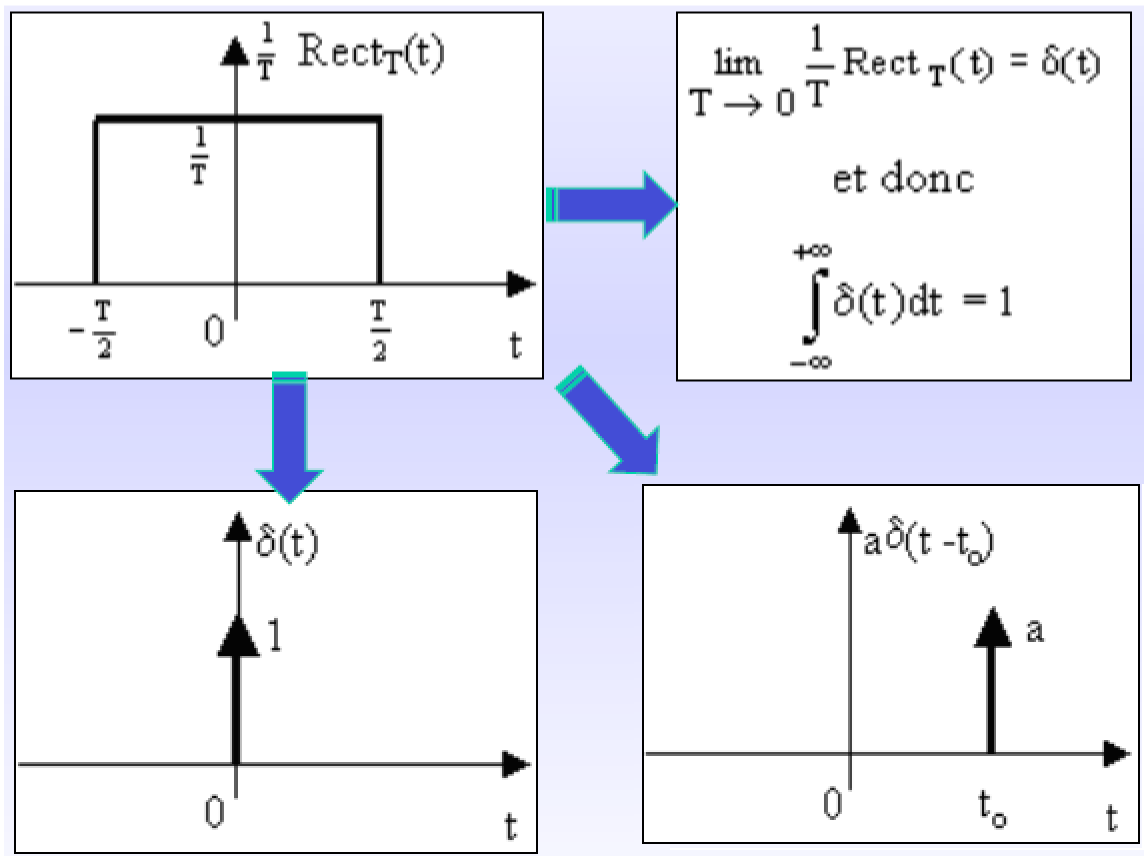
Contenu du cours II

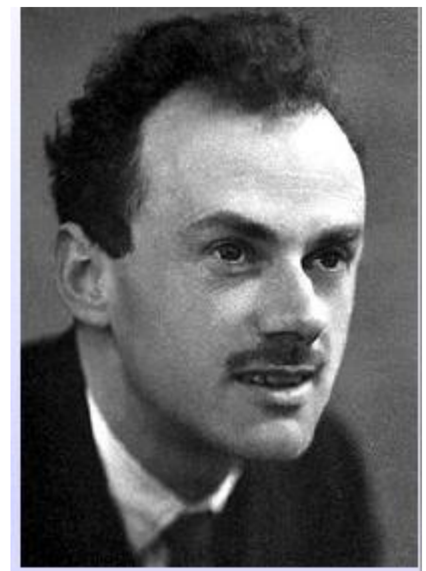
1. *Caractéristique d'un système*
2. ***Les signaux d'entrée particuliers***
3. *Schémas fonctionnels*
4. *Fonction de transfert*
5. *Analyse d'un système asservis*

Les signaux d'entrée particuliers

1. Impulsion de Dirac



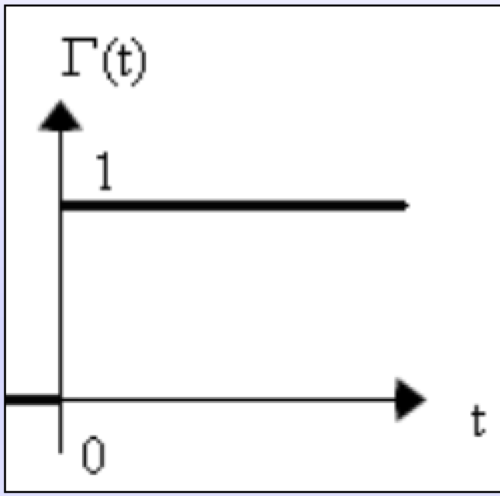




Paul Dirac (1902 - 1984, Nobel de Physique, 1933)

Les signaux d'entrée particuliers

2. Echelon unité (ou de Heaviside)



$$\Gamma(t) = \begin{cases} 1 & \forall \quad t \geq 0 \\ 0 & \forall \quad t < 0 \end{cases}$$

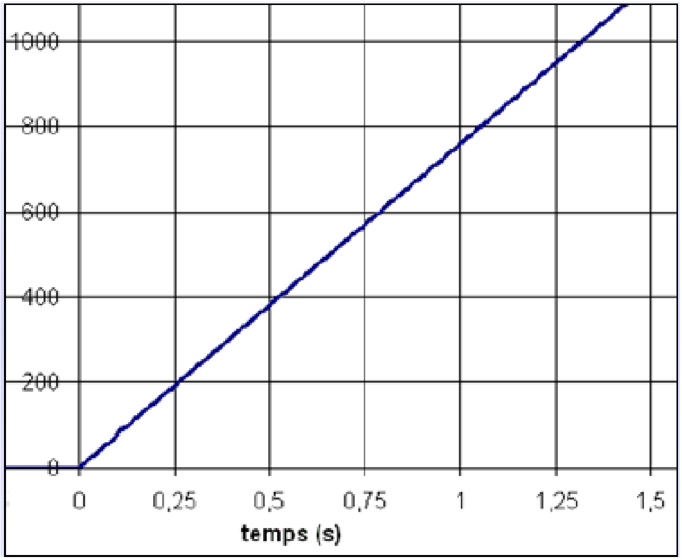
Oliver Heaviside
(1850 -1925)

Remarque

La valeur à l'origine (t = 0) peut être choisie égale à 1 mais ce choix est arbitraire.

Les signaux d'entrée particuliers

3. Echelon de vitesse (Rampe)



Remarque

La dérivée du signal Echelon de vitesse (ou rampe) correspond à l'Echelon.

Contenu du cours II

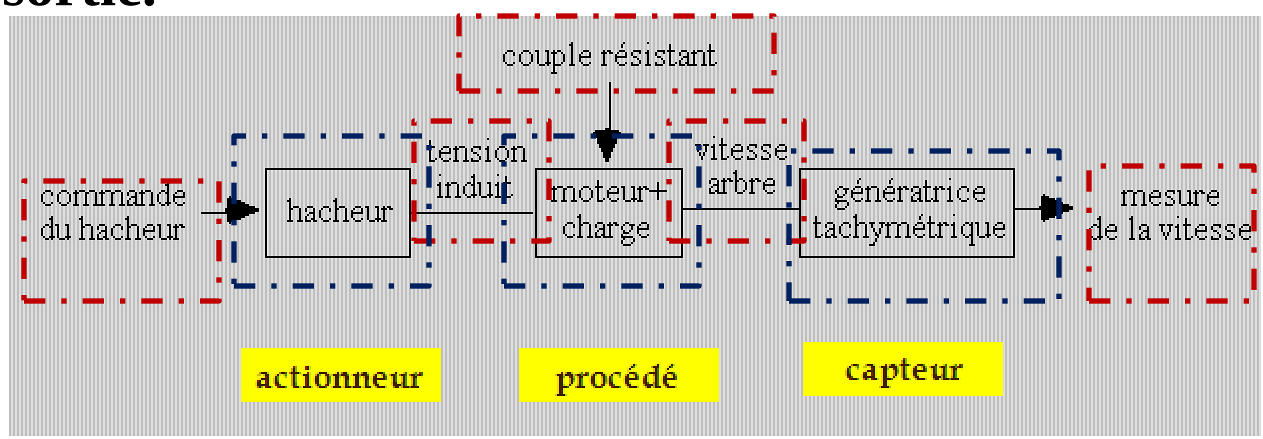
1. *Caractéristique d'un système*
2. *Les signaux d'entrée particuliers*
3. **Schémas fonctionnels**
4. *Fonction de transfert*
5. *Analyse d'un système asservis*

Schémas fonctionnels

1. Constitution du schéma fonctionnel (schéma bloc)

Le schéma fonctionnel permet de représenter un système en tenant compte des différentes variables et éléments qui le caractérise :

- **les variables sont représentées par des flèches**
- **les éléments sont représentés par des rectangles (bloc fonctionnel) ; chaque bloc fonctionnel est une fonction de transfert (FT) entre une variable d'entrée et une variable de sortie.**



Exemple : variation de vitesse d'un moteur

Schémas fonctionnels

2. Intérêt du schéma fonctionnel

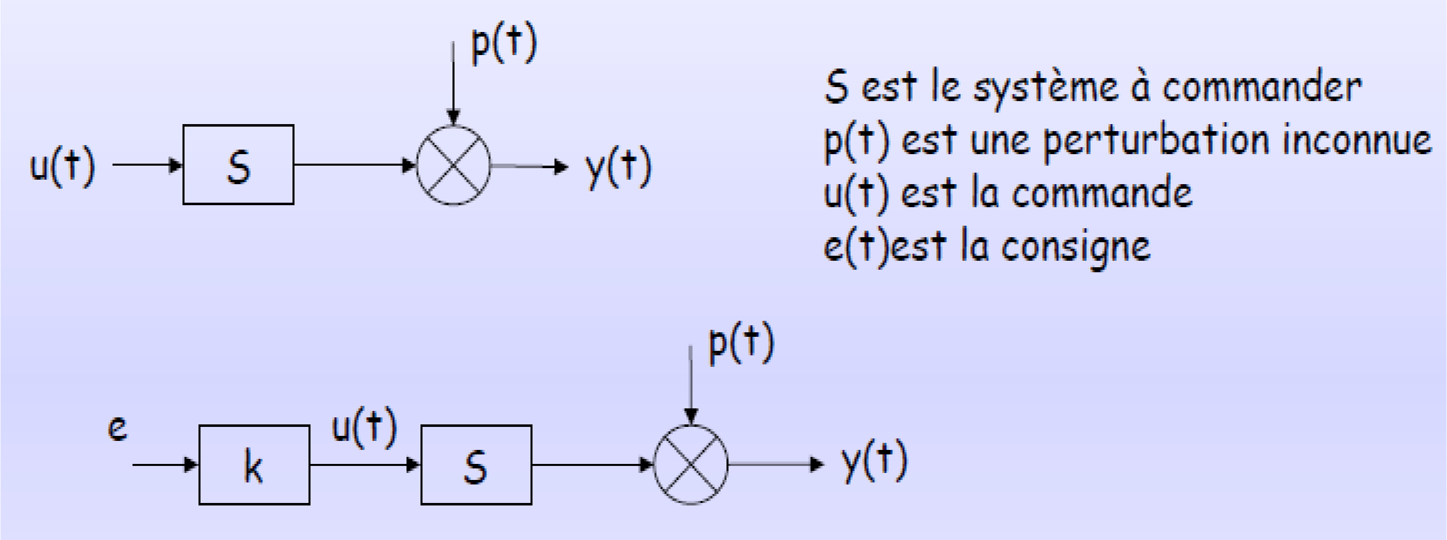
- Schéma fonctionnel consiste à une ***représentation graphique*** des relations entrées sorties;

- ***Mieux comprendre le fonctionnement d ’un système***, l ’interaction entre les différents éléments qui le composent

- ***Représentation graphique préalable*** à la détermination des différentes équations décrivant le fonctionnement du système

Schémas fonctionnels

3. Schéma bloc en boucle ouverte (BO)



Remarque

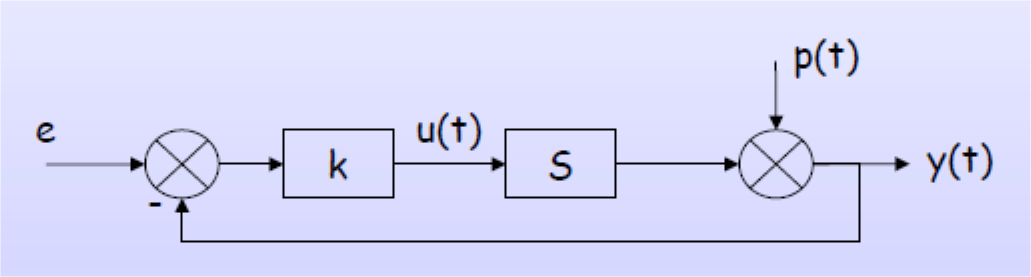
Il n'y a pas de moyen exact pour que la sortie y(t) reflète l'image de l'entrée

Exemple

Lancement d'une balle en mouvement parabolique (après, le lancement, pas de moyen de corriger la trajectoire de la balle)

Schémas fonctionnels

4. Schéma bloc en boucle fermée (BF)



Remarque:

Il existe une boucle de retour pour asservir le système à la juste valeur de la consigne e(t).

Exemple:

Contrôle de vitesse

Contenu du cours II

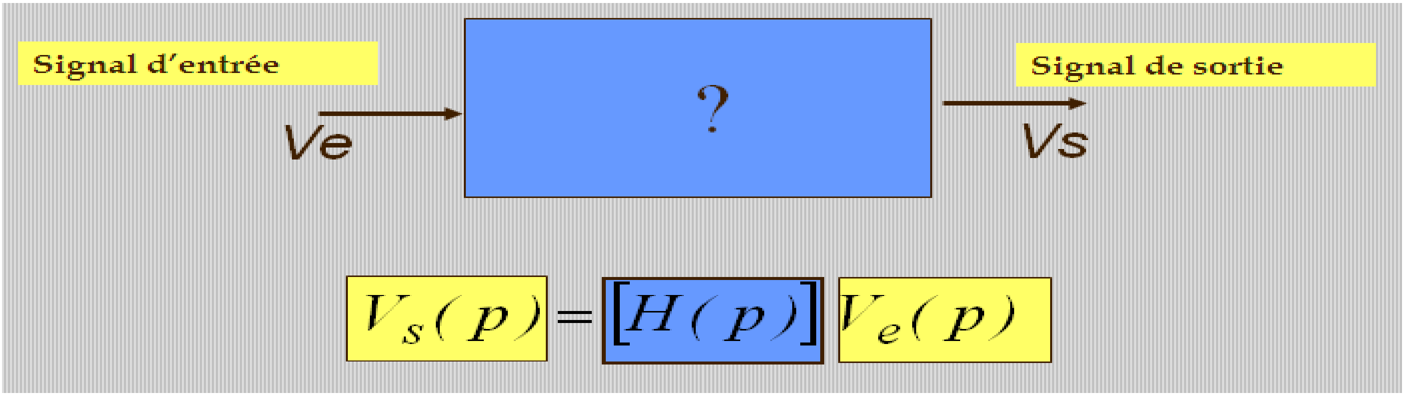
1. *Caractéristique d'un système*
2. *Les signaux d'entrée particuliers*
3. *Schémas fonctionnels*
4. ***Fonction de transfert***
5. *Analyse d'un système asservis*

Fonction de transfert

1. Présentation de la FT

2 types de variables (flèches) externes :

- **Signal d'entrée**
- **Signal de sortie dont l'évolution dépend de l'entrée**



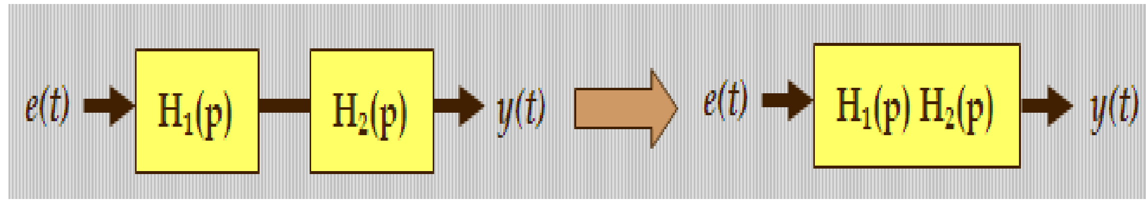
$$V_s(p) = \left[H(p)\right] V_e(p)$$

- La fonction de transfert H(p) caractérise le système.

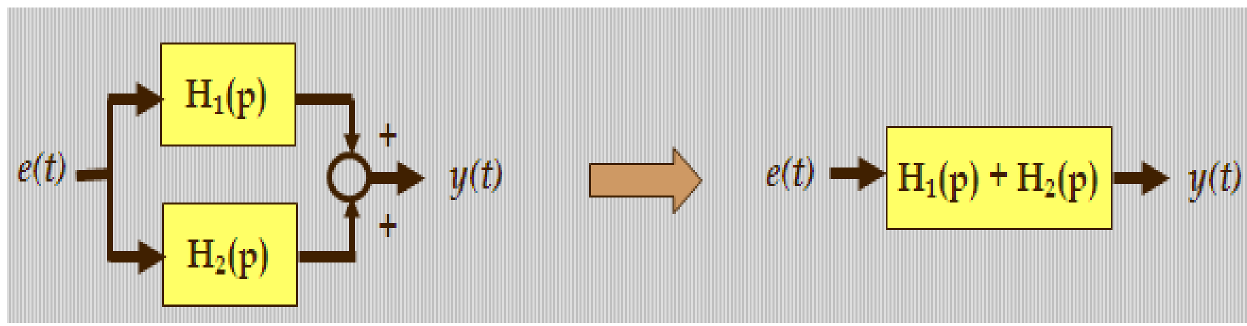
Fonction de transfert

2. Association des fonctions de transfert

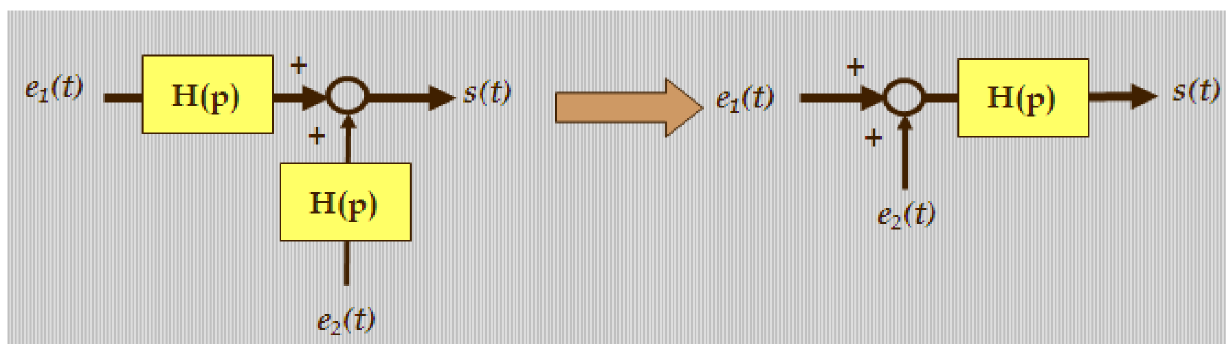
- **Série**



- **Parallele**



- **Factorisation**

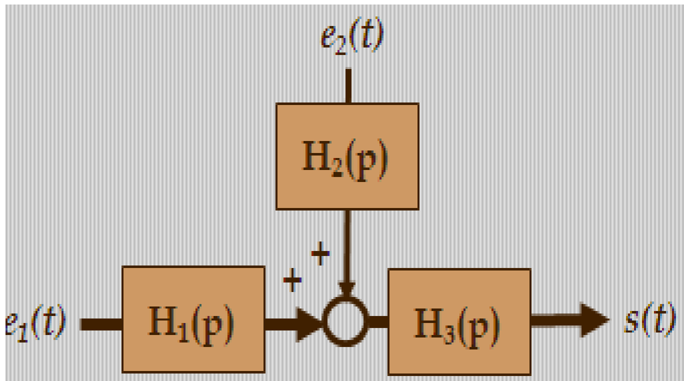


Fonction de transfert

2. Association des fonctions de transfert

➤ Principe de superposition

Quand un système a plusieurs entrées (commande et perturbations) pour calculer la FT entre une entrée particulière et la sortie, on suppose que les autres entrées sont nulles

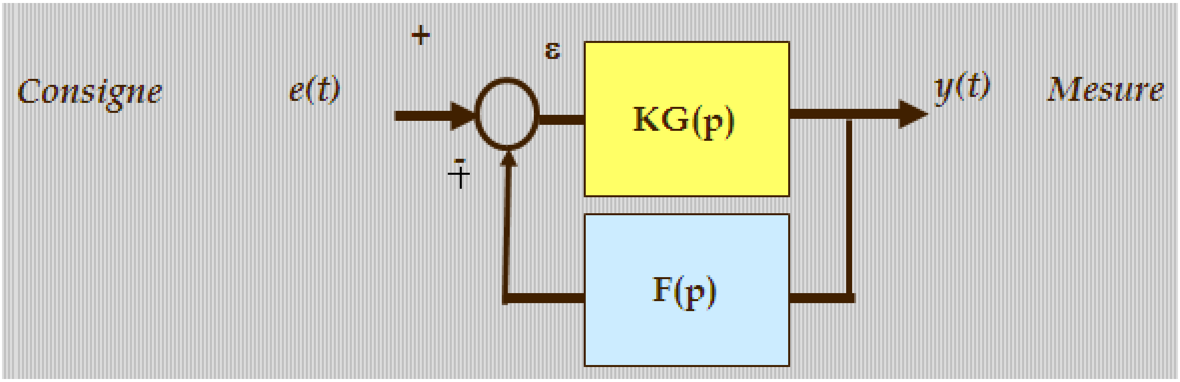


$$\frac{S(p)}{E_1(p)} = H_1(p) \times H_3(p)$$

$$\frac{S(p)}{E_2(p)} = H_2(p) \times H_3(p)$$

Fonction de transfert

3. Boucle de contre réaction

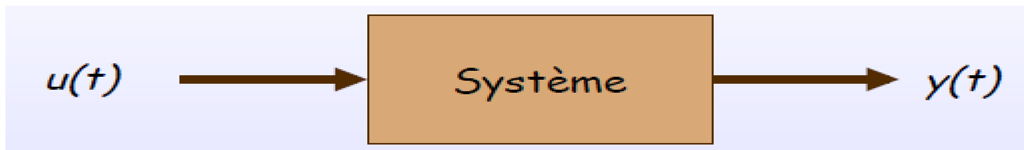


La fonction de transfert s'écrit:

$$H(p)=\frac{Y(p)}{E(p)}=\frac{K\,G(p)}{1\pm K\,G(p)\,F(p)}$$

Fonction de transfert

4. Représentation des systèmes dynamique



Le comportement dynamique du système est régi par une équation différentielle:

$$b_m \frac{d^m u}{dt^m} + \ldots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u(t) = a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y(t)$$

Dans les cas réels, m ≤ n : système causal: la cause u(t) précède l'effet y(t).

L'objectif est de déterminer y(t) connaissant u(t) à partir de l'équation généralisée:

$$\sum_{j=0}^{n} a_j y^{(j)}(t) = \sum_{i=0}^{m} b_i u^{(i)}(t)$$

Fonction de transfert

4. Représentation des systèmes dynamique

Etude temporelle des système dynamique : résolution d'équations différentielles ⇒ *complexe*.

Solution

Remplacer les équations différentielles par des équations polynomiales dans un domaine symbolique à l'aide de *la transformée de Laplace* :⇒ *plus simple*.

⇒ Cela revient à déterminer des racines du polynômes dans une table de transformation donnée

Fonction de transfert

5. Transformé de Laplace TL

➢ Définition de la Transformée de Laplace directe (TL)

- $x(t)$: signal réel tel que $x(t) = 0 \quad \forall t < 0$
- Transformée de Laplace de $x(t)$: $X(s) = \mathcal{L}(x(t)) = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-st}dt$
- $X(s)$: fonction de la variable complexe $s = \sigma + j\omega, \quad \sigma \geq 0$

Exemple Soit le signal $x(t) = e^{-at}$ pour $t \geq 0$ et $a > 0$

$$X(s) = \int_0^{+\infty} e^{-at}e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} e^{-(a+s)t}dt$$

$$X(s) = \frac{1}{s+a}$$

➢ Définition de la Transformée de Laplace inverse

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}(X(s)) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{ts}ds$$

Fonction de transfert

5. Transformé de Laplace TL

➢ Propriétés de la Transformée de Laplace

$x(t)$ et $y(t)$: signaux réels tels que $x(t)=0,\ y(t)=0\ \ \forall t<0$

- Linéarité

$$\mathcal{L}(\alpha\, x(t)+\beta\, y(t))=\alpha X(s)+\beta Y(s)\quad \forall\, \alpha,\beta\in \mathbb{R}^*$$

- Dérivation

$$\mathcal{L}(\dot{x}(t))=sX(s)-x(0^+)\qquad x(0^+)\text{ : condition initiale}$$

$$\mathcal{L}\left(x^{(k)}(t)\right)=s^k X(s)-s^{k-1}x(0^+)-s^{k-2}x^{(1)}(0^+)-\cdots-x^{(k-1)}(0^+)$$

$x(0^+), x^{(1)}(0^+),\cdots, x^{(k-1)}(0^+)$: conditions initiales

Cas particulier **: conditions initiales nulles** $\mathcal{L}\left(x^{(k)}(t)\right)=s^k X(s)$

Fonction de transfert

5. Transformé de Laplace TL

➢ Propriétés de la Transformée de Laplace

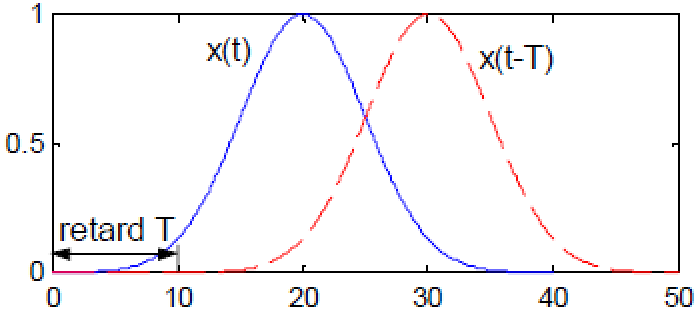
- Intégration

$$y(t)=\int_0^t x(\tau)d\tau \Rightarrow \mathcal{L}\big(y(t)\big)=\frac{X(s)}{s}+\frac{y(0^+)}{s}$$

Conditions initiales nulles: $$\mathcal{L}\big(y(t)\big)=\frac{X(s)}{s}$$

- Retard temporel

$$\mathcal{L}\big(x(t-T)\big)=e^{-sT}X(s)$$



Fonction de transfert

5. Transformé de Laplace TL

➢ Propriétés de la Transformée de Laplace

- Théoreme de la valeurs initiale

$$x(0) = \lim_{t \to 0} x(t) = \lim_{s \to +\infty} sX(s)$$

- Théoreme de la valeurs finale

$$x(\infty) = \lim_{t \to +\infty} x(t) = \lim_{s \to 0} sX(s)$$

- Produit de convolution

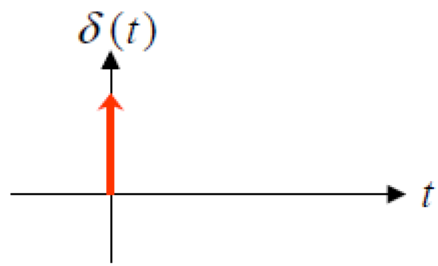
$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_0^\infty x(\tau) y(t-\tau) d\tau$$

$$\Rightarrow Z(s) = X(s)\ Y(s)$$

Fonction de transfert

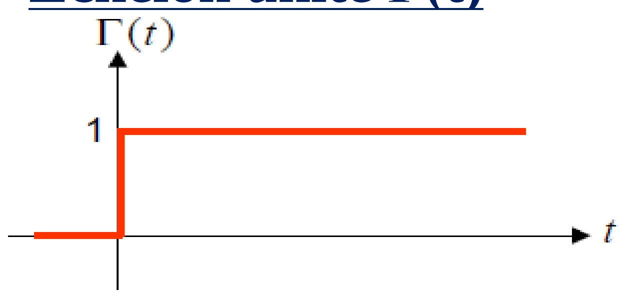
6. Transformé de Laplace TL des fonctions usuels

- **Impulsion de Dirac δ(t)**



$$\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$$

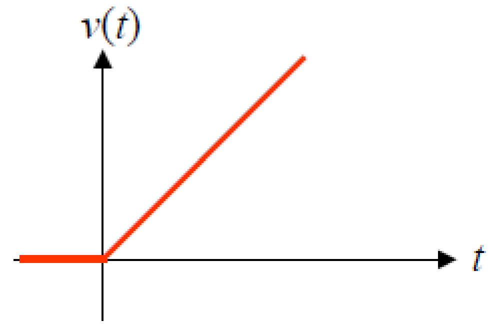
- **Echelon unité Γ(t)**



$$\Gamma(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(\Gamma(t)) = \frac{1}{s}$$

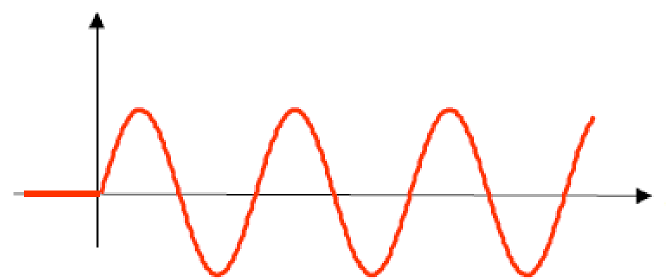
- **Rampe ou échelon de vitesse**



$$v(t) = t\Gamma(t)$$

$$\mathcal{L}(v(t)) = \frac{1}{s^2}$$

- **Signal sinusoïdal**



$$x(t) = \sin(\omega t + \varphi) \quad t \geq 0$$

$$\mathcal{L}(x(t)) = \frac{s \sin\varphi + \omega \cos\varphi}{s^2 + \omega^2}$$

Fonction de transfert

7. Fonction de transfert d'un système continu LTI

➢ **Définition:**

La fonction de transfert H(s) d'un système continu LTI exprime le rapport existant entre sa sortie Y(s) et son entrée U(s)

➢ **Système continu régi par une équation différentielle**

$$a_n y^{(n)}(t)+\cdots+a_1 y^{(1)}(t)+a_0 y(t)=b_m u^{(m)}(t)+\cdots+b_1 u^{(1)}(t)+b_0 u(t)$$

avec $m \leq n$

On suppose les ***conditions initiales nulles*** **c'est-à-dire:**

$$y^{(n-1)}(0)=\cdots=y^{(1)}(0)=y(0)=0$$

$$u^{(m-1)}(0)=\cdots=u^{(1)}(0)=u(0)=0$$

Fonction de transfert

7. Fonction de transfert d'un système continu LTI

En utilisant la TL de l'équation différentielle, on obtient :

$$a_n s^n Y(s) + \cdots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = b_m s^m U(s) + \cdots + b_1 s U(s) + b_0 U(s)$$

$$(a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0) Y(s) = (b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0) U(s)$$

$$\boxed{H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0}}$$

La fonction de transfert a la forme d'une fraction rationnelle :

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

N(s) et D(s) : polynômes en s de degrés respectifs *n* et *m*

Le système est dit d'ordre n

Fonction de transfert

8. Eléments caractéristiques de la FT

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0}$$

➢ Pôles (modes) et zéros du système

- **Les pôles sont les racines $\lambda_i \in \mathbb{C}$ du polynôme D(s). Les pôles sont soit réels, soit des paires de pôles complexes conjugués**
- **Un système d'ordre *n* admet n pôles distincts ou non**
- **Les zéros sont les racines $z_i \in \mathbb{C}$ du polynôme N(s)**

➢ Gain du système

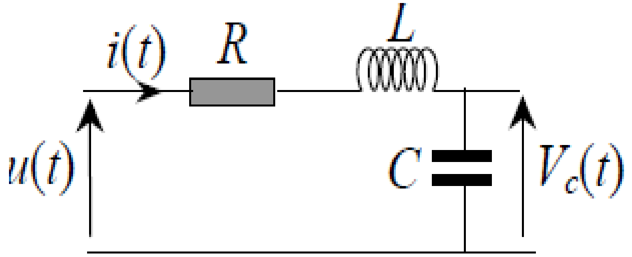
$$H(s) = \frac{K}{s^\alpha} \frac{b_m/b_0 \; s^m + \ldots + b_1/b_0 \; s + 1}{a_n/a_0 \; s^n + \ldots + a_1/a_0 \; s + 1} \qquad K = \lim_{s \to 0} s^\alpha H(s)$$

$$H(s) = \frac{K}{s^\alpha} H'(s) \qquad \alpha \geq 0$$

Fonction de transfert

9. Exemple de FT d'un système continu LTI

Exemple : circuit RLC



Sortie du système : $y(t) = V_c(t)$

▪ **Lois de l'électricité**

$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + V_c(t) = u(t)$$

$$V_c(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau \quad \Rightarrow \quad i(t) = C\dot{V}_c(t)$$

On en déduit : $LC\ddot{V}_c(t) + RC\dot{V}_c(t) + V_c(t) = u(t)$

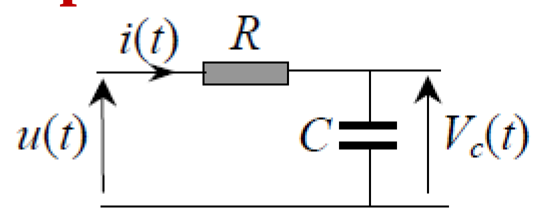
▪ **Fonction de transfert**

$$\left(LC\,s^2 + RC\,s + 1\right)V_c(s) = U(s)$$

$$H(s) = \frac{V_c(s)}{U(s)} = \frac{1}{LC\,s^2 + RC\,s + 1}$$

Fonction de transfert

10. Réponse d'un système continu LTI par la TL



Exemple: circuit RC

Sortie du système : $y(t) = V_c(t)$

- **Equation differentielle** $RC\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$

Donner l'expression de la réponse du système pour une entrée échelon d'amplitude u_0=2V. La tension initiale aux bords de la capacité est V_c (0)=0.5V

- **Application de la TL**

$$RC\left(sY(s) - V_c(0)\right) + Y(s) = U(s) \quad \Rightarrow Y(s) = \frac{U(s)}{RC\,s+1} + \frac{RC}{RC\,s+1}V_c(0)$$

$$u(t) = u_0\Gamma(t) \quad \Rightarrow \quad U(s) = \frac{u_0}{s} \quad \Rightarrow Y(s) = \frac{u_o}{s(RC\,s+1)} + \frac{RC}{RC\,s+1}V_c(0)$$

Fonction de transfert

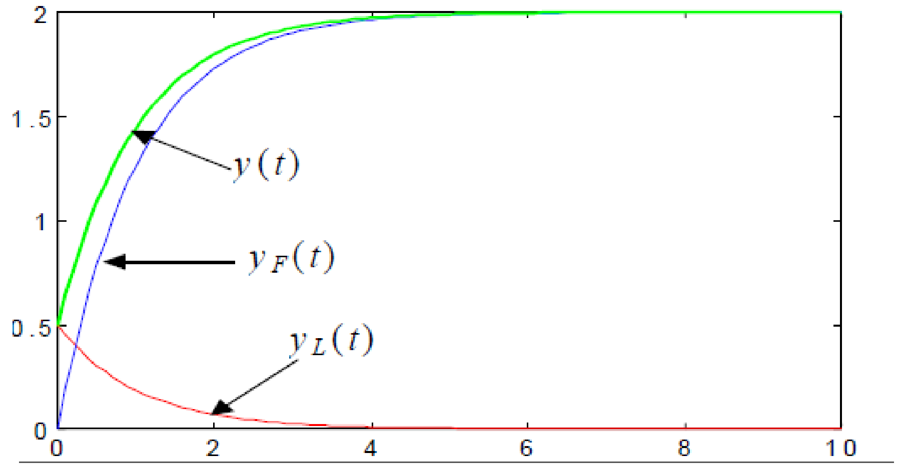
10. Réponse d'un système continu LTI par la TL

Exemple : circuit RC

$$Y(s)=\frac{u_o}{s(RC\,s+1)}+\frac{RC}{RC\,s+1}V_c(0)$$

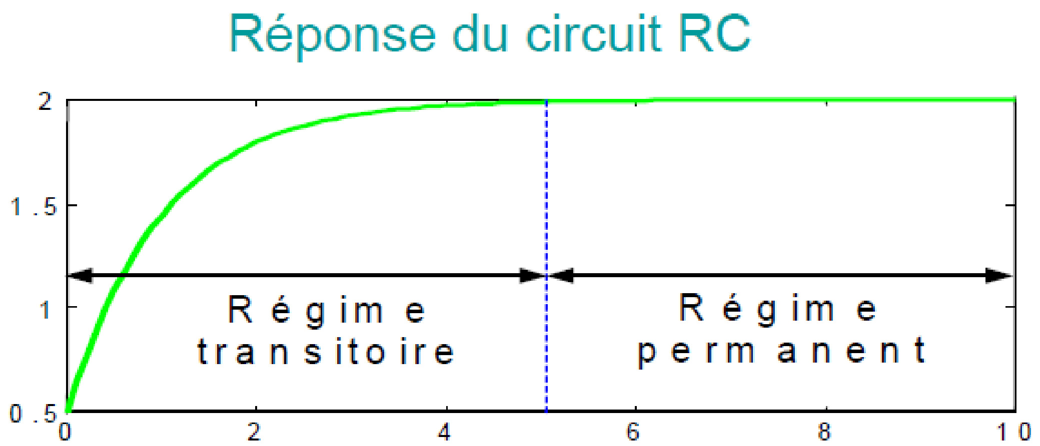
En utilisant les tables de transformée de Laplace, on obtient :

$$y(t)=\underbrace{u_0\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)}_{y_F(t)}+\underbrace{V_c(0)\,e^{-\frac{t}{RC}}}_{y_L(t)}$$



Fonction de transfert

11. Régimes transitoire et permanent



- **Régime permanent**

Soumis à un entrée échelon, rampe, … un système linéaire stable aura un comportement asymptotique similaire à l'entrée : on dit qu'il a atteint le régime permanent.

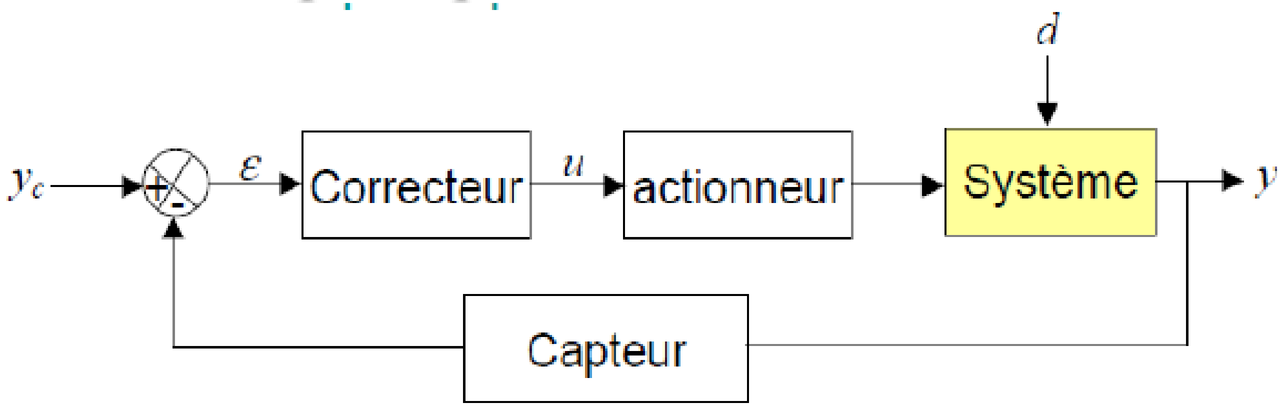
- **Régiment transitoire**

C'est la partie de la réponse qui précède le régime permanent. Le régime transitoire est lié à la dynamique du système

Contenu du cours II

Analyse d'un système asservis

1. Schéma de principe d'un asservissement



- y_c : consigne
- $\varepsilon = y_c - y$: signal d'erreur (écart entre consigne et sortie du système)
- Correcteur : élabore la loi de commande u
- Actionneur : applique la commande au système. Joue en général le rôle d'amplificateur de puissance
- y : sortie du système ou grandeur à asservir

Capteur : mesure et transforme la sortie

Analyse du système asservis

2. Propriétés d'un système asservi

- **Stabilité**

Le système asservi doit fonctionner automatiquement. Il est indispensable qu'il soit stable. Autrement, le système évolue en s'éloignant de son point (ou trajectoire) d'équilibre, ce qui peut engendrer des saturations voire une dégradation du système.

- **Précision**

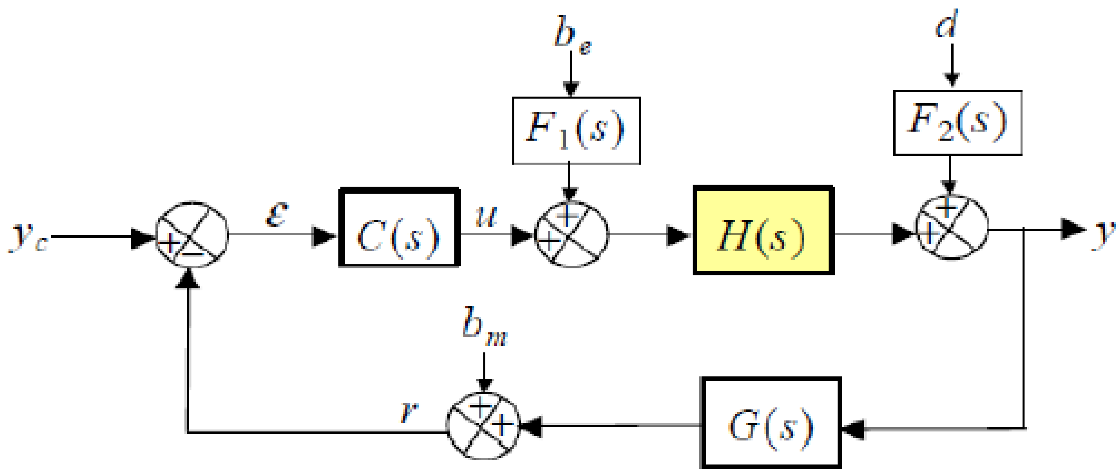
En régime permanent, la sortie du système asservi doit suivre la référence sans erreur et rejeter rapidement les perturbations

- **Performances dynamiques (rapidité)**

Elles caractérisent le temps de réaction du système lorsque la consigne varie ainsi que la rapidité avec laquelle le système asservi "efface" les perturbations

Analyse d'un système asservis

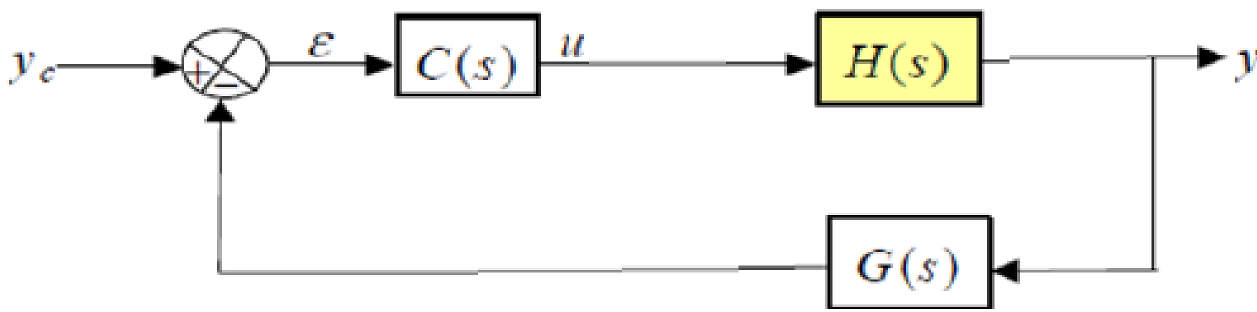
3. Structure fonctionnelle d'un asservissement



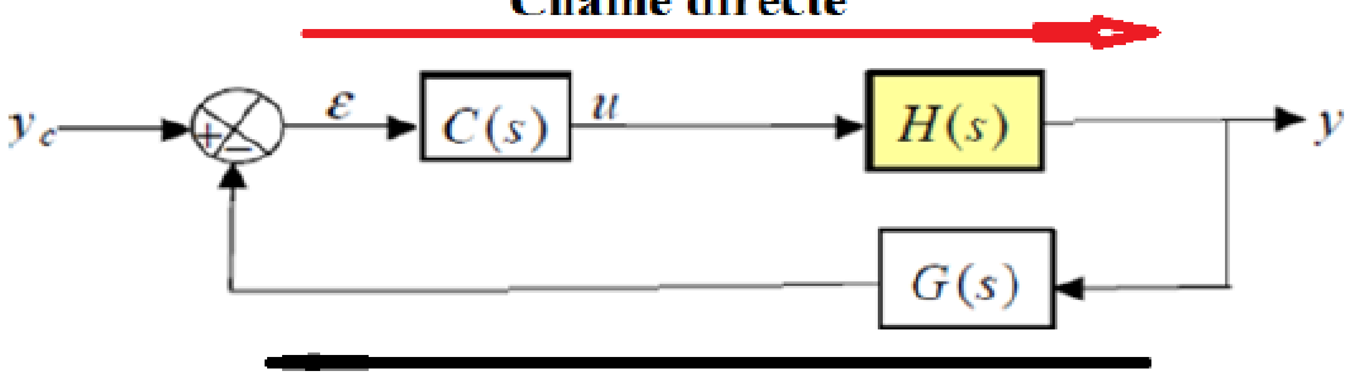
- $C(s)$: fonction de transfert du correcteur
- $H(s)$: fonction de transfert du système
- $G(s)$: fonction de transfert de la boucle de retour (capteur en général)
- r : signal de retour
- d : perturbation externe (mesurable ou non), b_m : bruit de mesure
- b_e : bruit d'entrée (bruit de transmission de u aux actionneurs)

Analyse d'un système asservis

3. Fonction de transfert (perturbations nulles)



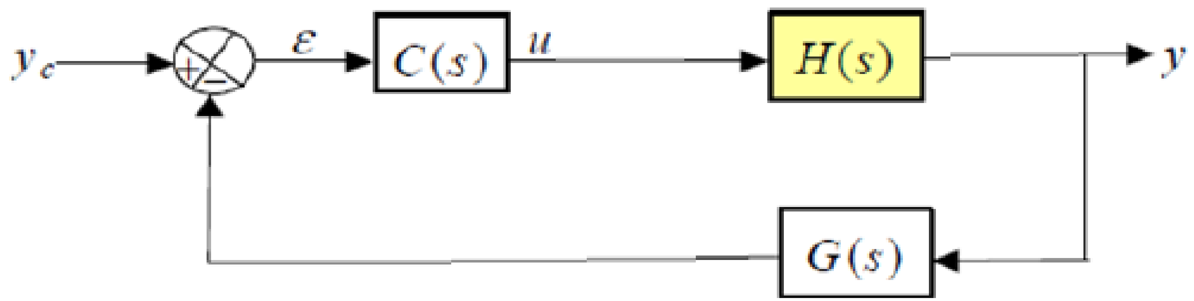
Chaine directe



Chaine de retour

Analyse d'un système asservis

3. Fonction de transfert (perturbations nulles)



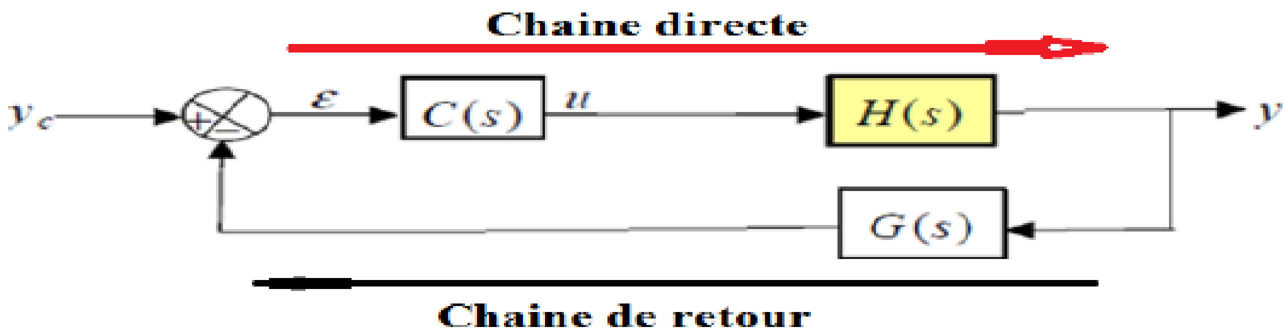
- **Fonction de transfert en boucle ouverte** $H_{BO}(s)$

$$H_{BO}(s) = (\text{chaine directe} * \text{ chaine de retour})$$

$$\boxed{H_{BO}(s) = C(s)H(s)G(s)}$$

Analyse d'un système asservis

3. Fonction de transfert (perturbations nulles)



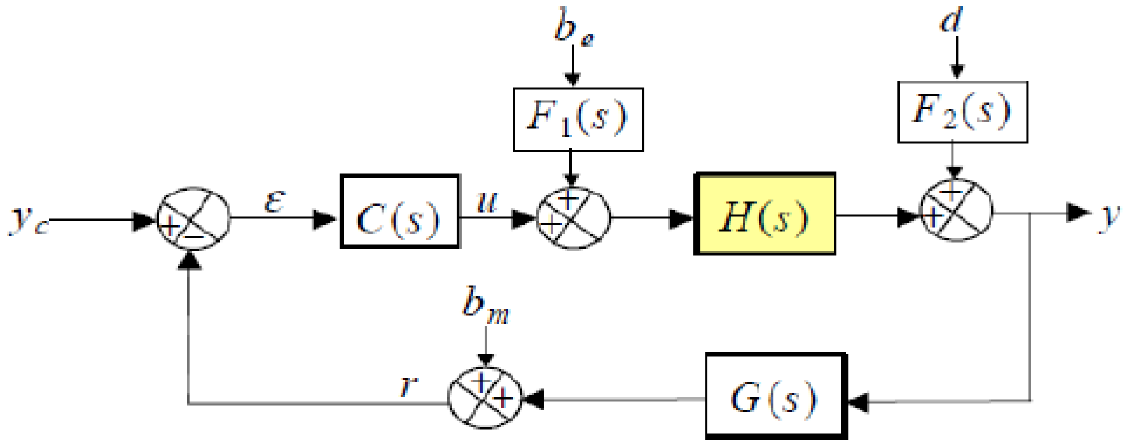
- **Fonction de transfert en boucle Fermée** $H_{BF}(s)$

$$H_{BF}(s) = \frac{\text{Chaine directe}}{1 + (\text{chaine directe} * \text{chaine de retour})}$$

$$H_{BF}(s) = \frac{C(s)\ H(s)}{1 + C(s)\ H(s)\ G(s)}$$

Analyse d'un système asservis

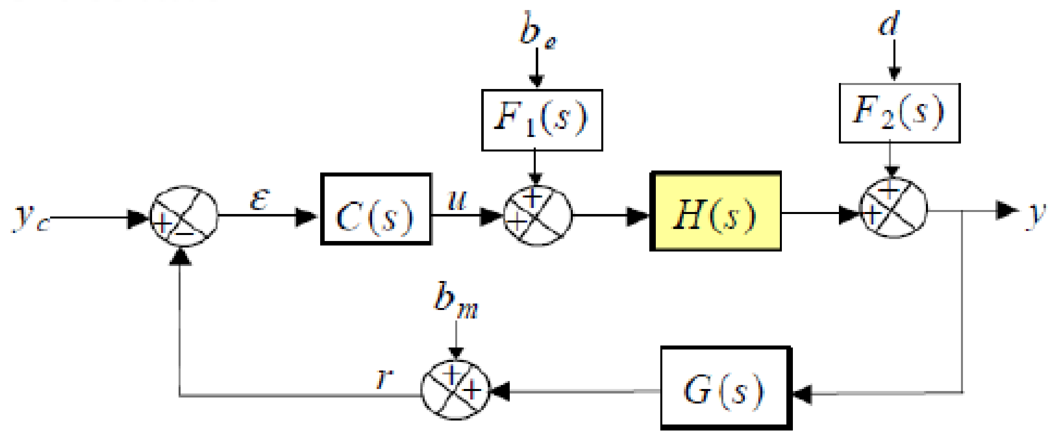
4. Fonction de transfert totale



$$H_T(s) = \frac{Y(s)}{Yc(s)} + \frac{Y(s)}{B_e(s)} + \frac{Y(s)}{B_m(s)} + \frac{Y(s)}{D(s)}$$

Analyse d'un système asservis

4. Fonction de transfert totale



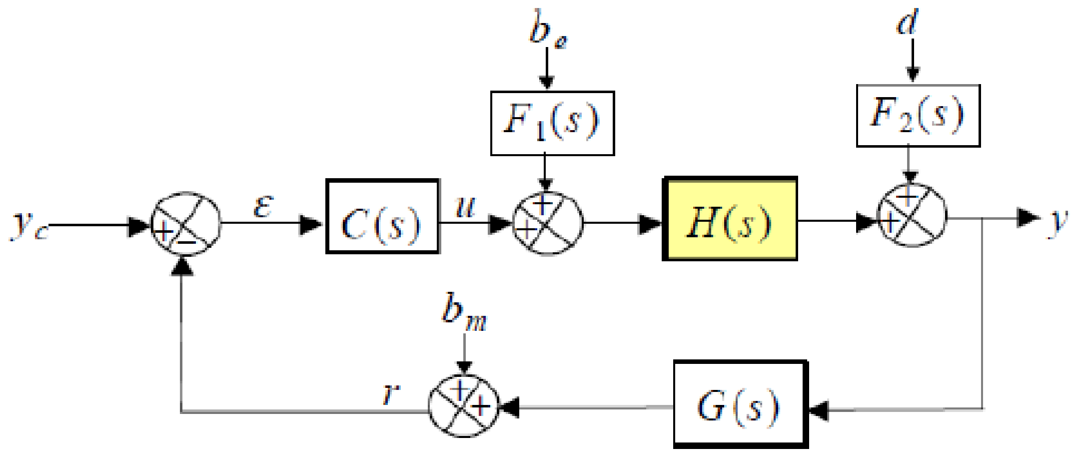
Pour déterminer la FT entre la sortie et une entrée ou une perturbation on applique le théorème de superposition (on considère une entrée ou perturbation et on annule les autres entrées et perturbations.

$$P_e(s) = \frac{Y(s)}{B_e(s)} = \frac{F_1(s)H(s)}{1+H_{BO}(s)}$$ **(yc(t)=0, bm(t)=0, d(t)=0)**

avec $H_{BO}(s) = C(s)H(s)G(s)$

Analyse d'un système asservis

4. Fonction de transfert totale



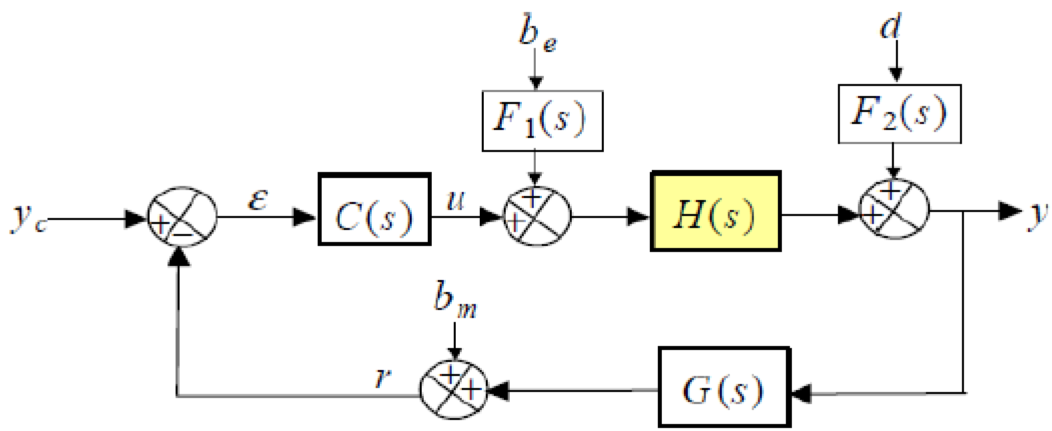
$$P_d(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{F_2(s)}{1+H_{BO}(s)}$$ **(yc(t)=0, bm(t)=0, be(t)=0)**

$$P_m(s) = \frac{Y(s)}{B_m(s)} = \frac{C(s)H(s)}{1+H_{BO}(s)} = H_{BF}(s)$$ **(yc(t)=0, d(t)=0, be(t)=0)**

avec $H_{BO}(s) = C(s)H(s)G(s)$

Analyse d'un système asservis

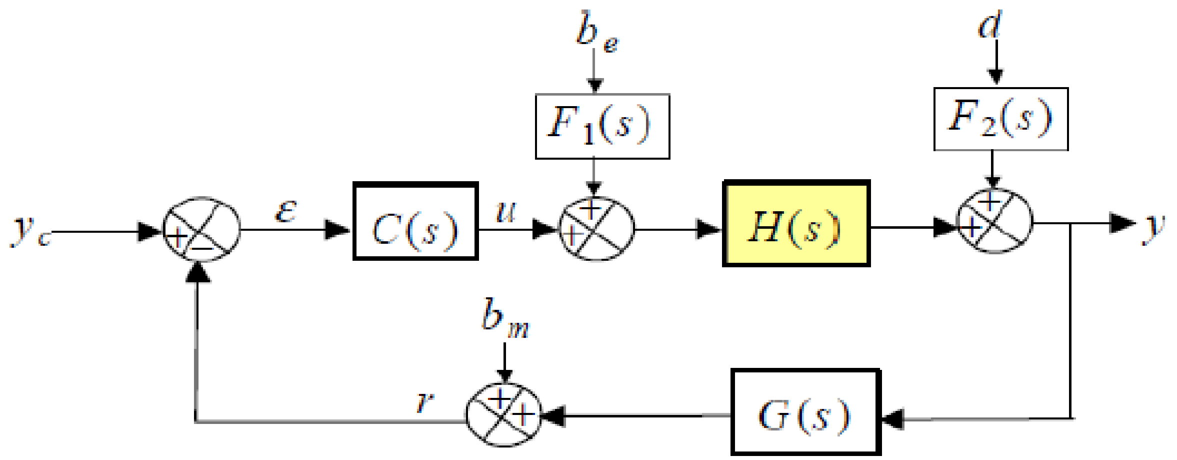
5. Expression de la Fonction de transfert totale



$$\mathbf{H_T(s)} = H_{BF}(s) + P_e(s) + P_m(s) + P_d(s)$$

Analyse d'un système asservis

5. Expression de la sortie d'un système bouclé



$$Y(s) = H_{BF}(s)Y_c(s) + P_e(s)B_e(s) + P_d(s)D(s) + H_{BF}(s)B_m(s)$$