

Chapitre 4. Comportement du béton en flexion simple

4.1 Conventions/notations

Signes :

- + compression
- - traction

Notations : voir tableau

Unités : 1 MegaPascal = 10^6 Pascals = 10^6 N/m² = 1 MPa = 1 N/mm²

lower case	upper case	name
α		alpha
β		beta
γ		gamma
δ	Δ	delta
ϵ		epsilon
ζ		zeta
η		eta
θ		theta
λ	Λ	lambda
μ		mu
ν		nu
π		pi
ρ		rho
σ	Σ	sigma
τ		tau
ϕ		phi
ψ		psi

4.2 Poutre en béton non armé

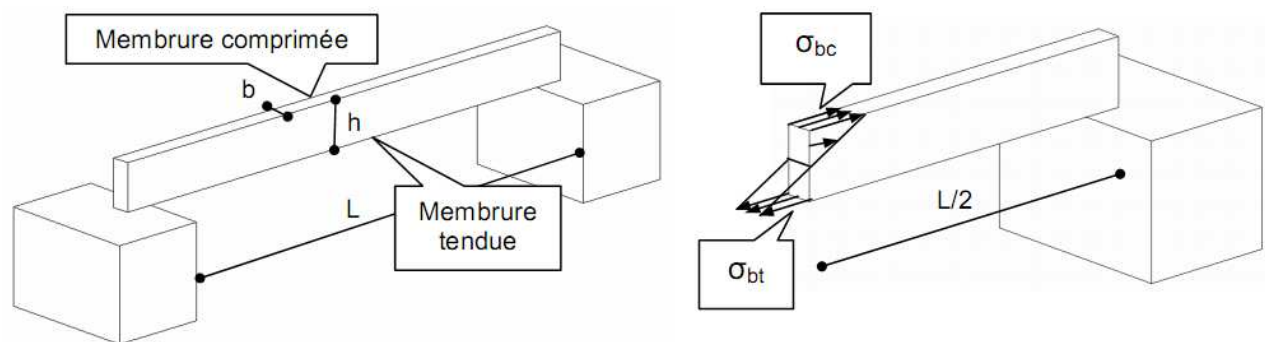


Fig. 4.1

Soit une poutre en béton non armé, de section droite rectangulaire $b \times h$, franchissant une portée L . La poutre est sollicitée par son seul "poids propre", g , charge uniformément répartie, exprimée en kN par "mètre linéaire" de poutre. Elle "travaille" en flexion "simple". A mi portée, le moment de flexion est maximum, il a pour intensité : $M_{\max} = g.L^2 / 8$

Si on admet une distribution plane des contraintes normales agissant sur le béton de la section droite à mi-portée, les contraintes maximales valent $\sigma_{bc} = - \sigma_{bt} = 6.M_{\max}/(bh^2)$

Le béton ayant une résistance en traction de l'ordre du 1/10^e de sa résistance en compression, si l'intensité de σ_{bt} reste inférieure à la résistance à la traction du béton, notée f_{tj} , il n'y a pas risque de rupture.

4.2.1 Exercice :

Avec cette hypothèse de distribution des contraintes, déterminer la portée maximum L d'une poutre en béton non armé ne supportant que son propre poids ($\gamma = 25$ kN/m³). Et de dimensions : $b = 30$ cm, $h = 60$ cm, et de résistance à la traction $f_{tj} = 2$ MPa,

On peut aussi représenter les forces résultantes des compressions et des tractions N_{bc} et N_{bt} . Leur intensité respective représente le volume des prismes de compression et de traction de la Fig.4.1. Soit

$$N_{bc} = \sigma_{bc} \cdot (h/2) \cdot b/2 = 6 \cdot M_{\max}(h \cdot b/4) / (bh^2) = 3 M_{\max} / (2h) = N_{bt}$$

$$\text{ou } M_{\max} = N_{bc} (2/3) \cdot h = N_{bt} (2/3) \cdot h$$

On parle de "couple des forces intérieures", de "bras de levier" $Z = (2/3)h$ et de moment égal au moment de flexion maximum.

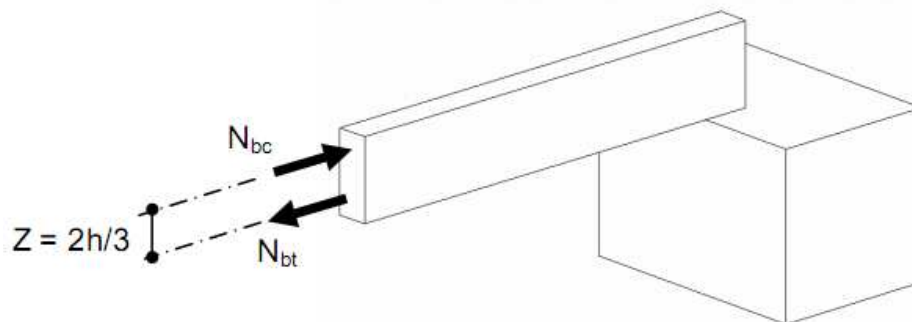


Fig. 4.2

Si on fait croître le moment de flexion en appliquant à la poutre non armée une charge d'exploitation, notée q , en kN par ml, la rupture brutale se produit si on atteint $\sigma_{bt} = f_{tj}$. La rupture se produit évidemment dans la zone où règne le moment de flexion maxi.

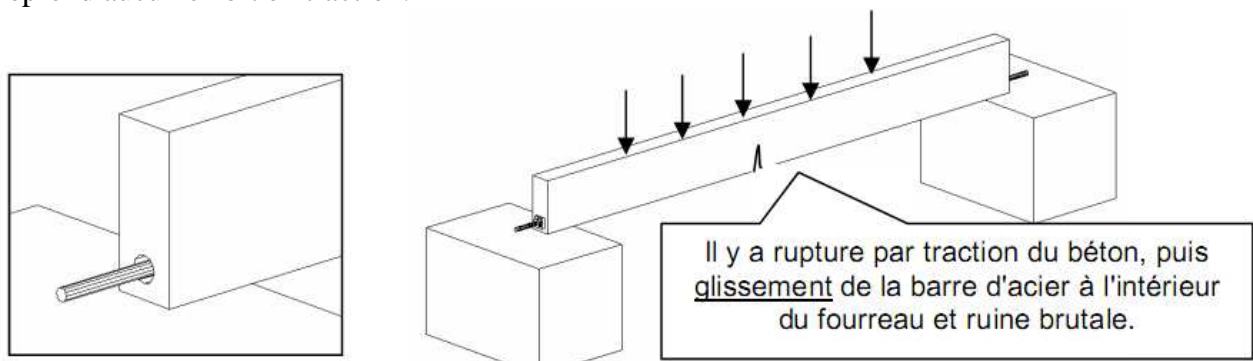
Pour compenser la faible résistance en traction du béton qui limiterait trop fort le chargement de la poutre, l'idée est de disposer, préalablement à la mise en service, une (ou plusieurs) barres d'acier ("armatures") parallèlement à la direction et capable d'équilibrer l'effort de traction.

On peut alors imaginer d'armer ou de « précontraindre » le béton.

4.3 Poutre en béton et armature dans un fourreau

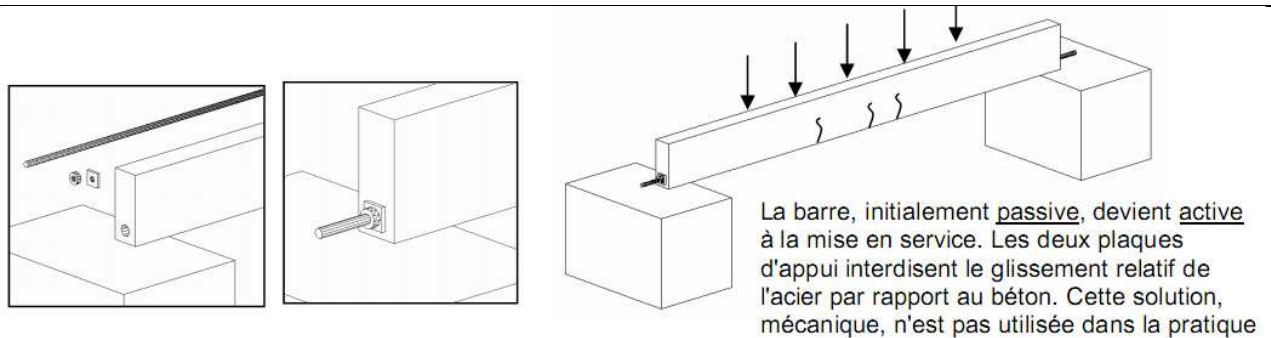
Imaginons pour commencer qu'une armature est disposée dans un fourreau dans la zone tendue de la section.

Au début du chargement de la poutre, le béton de la partie inférieure de la poutre se met en traction et donc ses fibres s'allongent. La barre qui est dans un fourreau, elle ne s'allonge pas : il y a donc glissement relatif entre la barre et le béton. La barre conserve sa longueur initiale et ne reprend aucun effort en traction.

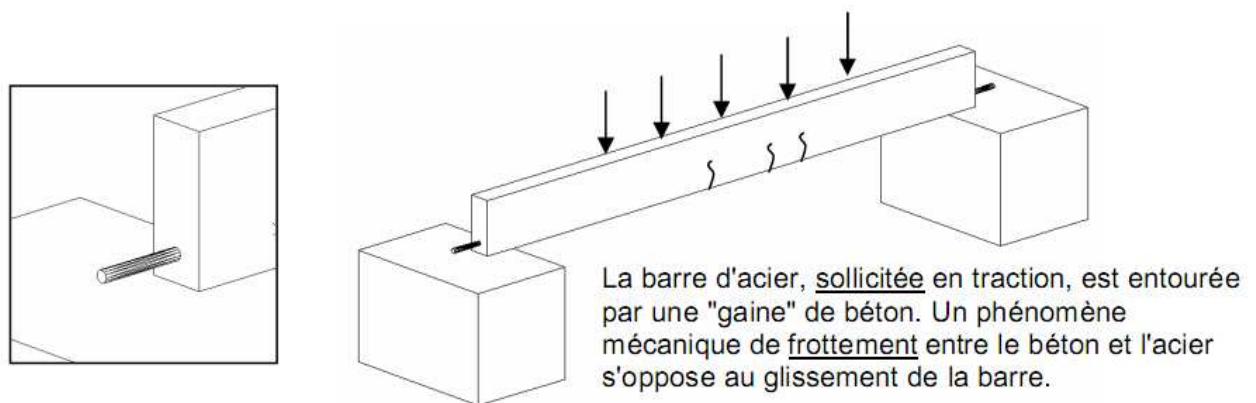


Cette disposition ne peut donc convenir : il faut obliger la barre à s'allonger comme le béton.

4.4 Poutre en béton avec plaques d'appui empêchant le glissement de l'armature et écrous sur tige filetée

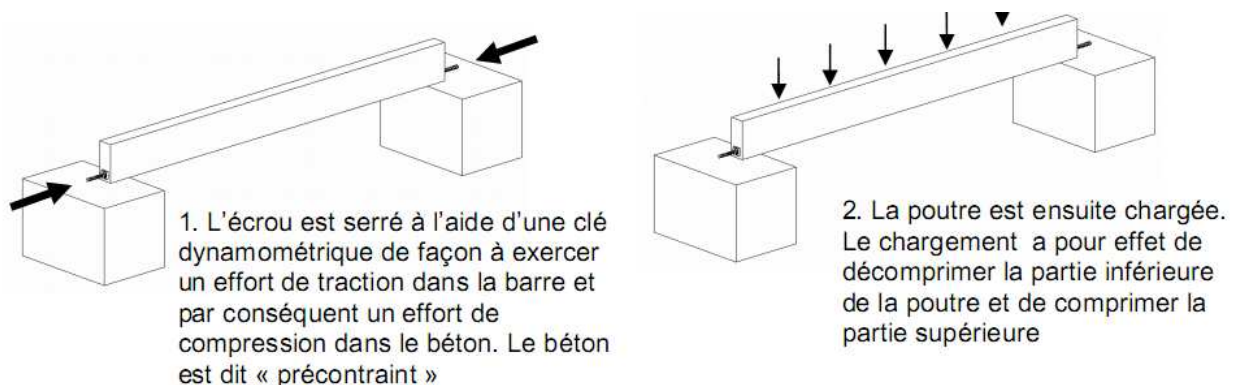


4.5 Poutre en béton armé (l'armature adhère au béton).



Cette solution est la plus économique.

4.6 Poutre en béton précontraint



Ce type de précontrainte est dite par post-tension. Mais dans le domaine du bâtiment, les éléments préfabriqués précontraints par fils adhérents sont plus couramment utilisés (exemple : les hourdis). Il s'agit de couler du béton autour de câbles initialement tendus par des vérins. Lorsque le béton atteint la résistance voulue, les vérins sont relâchés, et par adhérence les câbles vont précontraindre le béton.

Lors de l'étude d'une structure en béton armé, il va donc être nécessaire de connaître l'origine et l'intensité des sollicitations de traction :

- un effort normal de traction, un moment de flexion, un moment de torsion, un effort tranchant, induisent des contraintes de traction dans le béton ; ce sont les plus faciles à exprimer et à quantifier à l'aide des méthodes de la Résistance des Matériaux adaptées au matériau béton armé, mixte et hétérogène.
- les effets du retrait du béton, de la température (chocs thermiques, gradients de température), des tassements différentiels éventuels des sols de fondations, des chocs, des

séismes, des explosions, de la grande hyperstaticité des ouvrages de bâtiment, sont connus mais difficiles à quantifier. On s'en prémunit en respectant des dispositions constructives et en prévoyant des armatures minimales réglementaires.

4.7 Actions, Combinaisons, Etats Limites

Les différentes étapes d'un projet de béton armé sont les suivantes:

1. Analyse de la structure, modélisation
2. Détermination des actions ou bilan des charges
3. Descente de charges et combinaisons d'actions
4. Sollicitations (N, V et M)
5. Dimensionnement
6. Plans de coffrage et plans de ferrailage

Une structure en béton bien conçue doit atteindre plusieurs objectifs:

L'ossature ne doit pas s'effondrer	L'ensemble doit rester en équilibre lorsque des charges sont appliquées, Le béton et l'acier ne doivent pas se rompre Les éléments ne doivent pas flamber
La structure doit être durable	Limitation de l'ouverture de fissure, enrobages et qualité de béton suffisants, ...
La structure ne doit pas se déformer excessivement pour des raisons esthétiques ou pour ne pas créer des dommages (carrelages ou cloisons fissurées)	Limitation des flèches

Les actions sont les charges appliquées à la structure, on distingue :

Actions permanentes	G	Poids propre des superstructures et des équipements fixes (cloisons, revêtement de sol)
Actions variables	Q W S	Charge d'exploitation Vent Neige
Actions accidentelles	FA	Séismes Feu

Les valeurs numériques de ces actions sont définies réglementairement. Ces valeurs caractéristiques correspondent à des valeurs dont la probabilité d'être effectivement dépassées est fixée à l'avance.

Comme ces actions peuvent se cumuler, on parle de combinaison d'actions. On additionne les valeurs pondérées des différentes actions (voir cours de calcul des structures)

4.8 Etats limites

La conception des ouvrages en béton se fait selon la théorie des Etats Limites. On distingue:

4.8.1 Les Etats Limites de Service ou E.L.S

Ce sont les conditions qu'il faut respecter pour que l'exploitation normale et la durabilité de la

construction soient assurées.

Les états limites de service présentent deux domaines:

1. Un domaine qui nécessite des calculs : par exemple, vérifier que des contraintes ou des déformations sont admissibles
2. Un domaine qui ne nécessite aucun calcul : c'est l'ensemble des dispositions constructives qui doivent être assurées.

4.8.2 Les Etats Limites Ultimes ou E.L.U.

Ils font référence aux conditions de rupture. Il s'agit de s'assurer que le risque de ruine est très faible en prenant divers coefficients de sécurité (sur les matériaux) et de pondération (sur les charges).

En effet les sources d'erreur sont les suivantes :

- Les matériaux peuvent être moins résistants que prévu.
- Les charges appliquées peuvent être plus sévères que prévu.
- Les méthodes de calcul et les hypothèses peuvent ne pas correspondre exactement à la réalité.

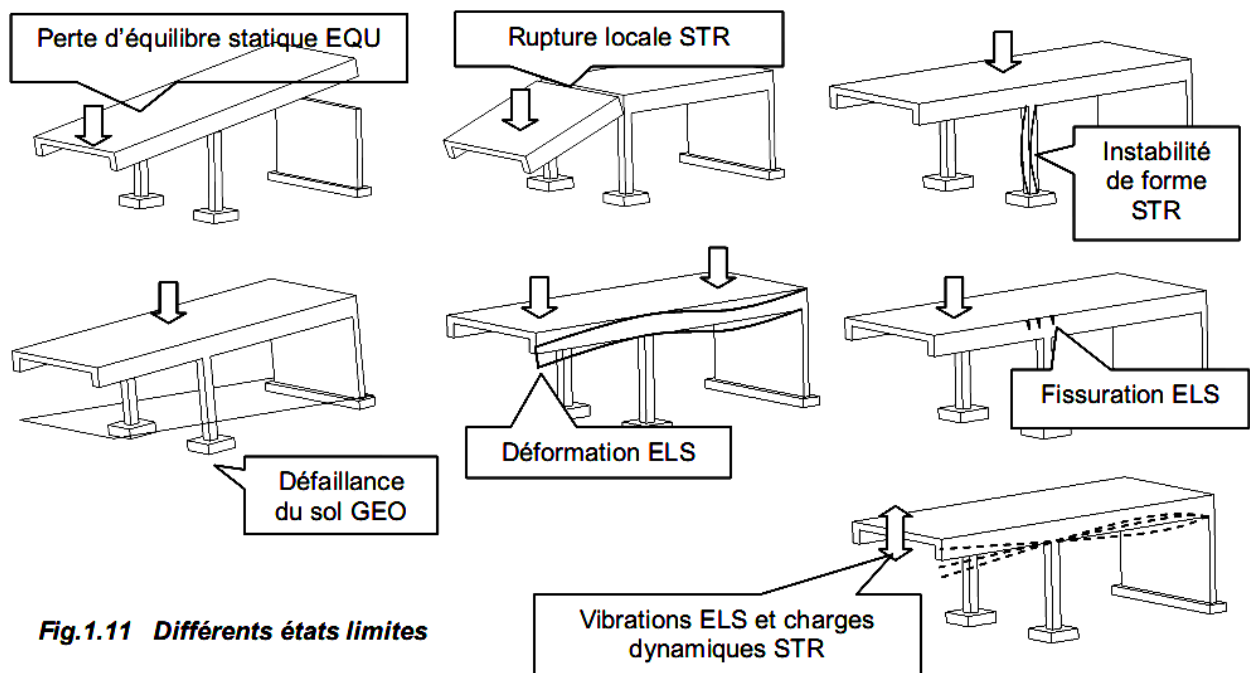
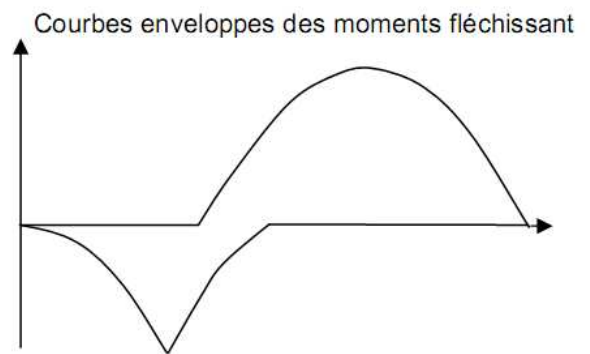
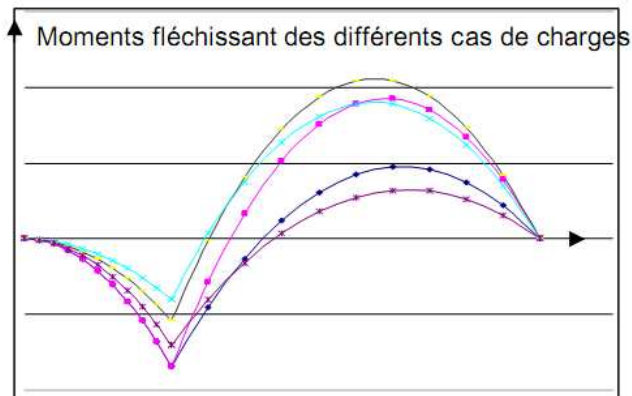
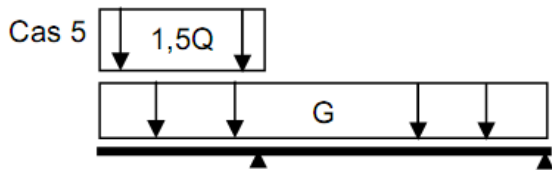
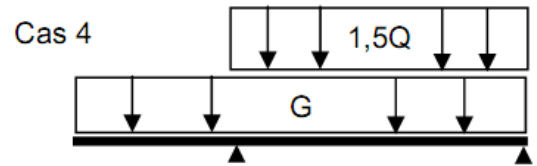
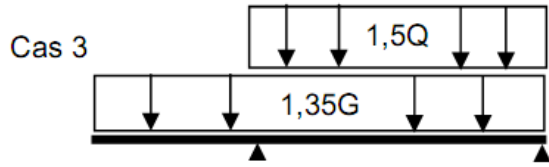
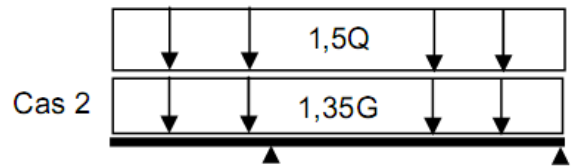
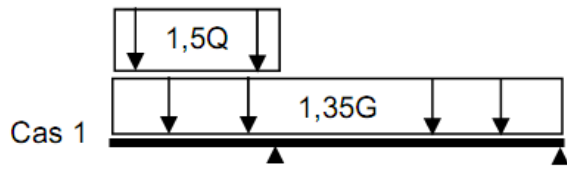


Fig.1.11 Différents états limites

Le manuel de calcul (MC) reprend, au point 7, les coefficients de sécurité partiels à appliquer aux combinaisons de charges permanentes et variables, ainsi que ceux à appliquer à la résistance caractéristique du béton (MC-11.1.2) et à la limite élastique caractéristique de l'acier des armatures (MC-11.2).

4.9 Cas de charges favorables et défavorables – courbes enveloppes

Selon que les différentes travées peuvent être chargées ou déchargées par la charge d'exploitation, différents cas de charges doivent être étudiés. Dans le cas d'une poutre sur deux appuis simples prolongée par un porte-à-faux on peut distinguer les 5 cas suivants :

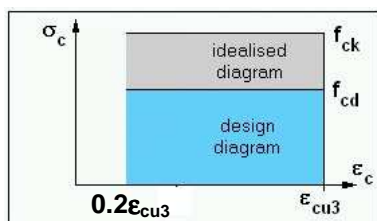
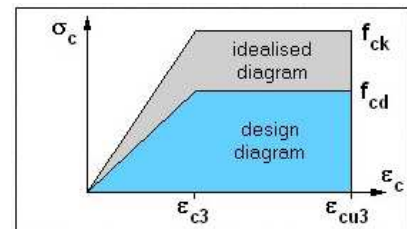
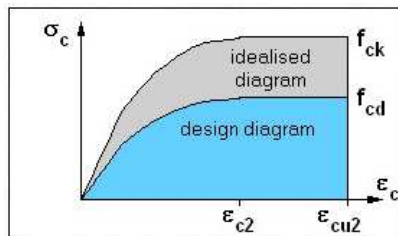
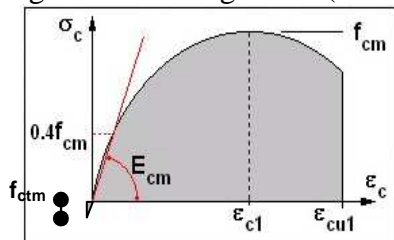


4.10 Matériaux : diagrammes contraintes-déformations

4.10.1 Béton

Le diagramme réel du béton est non-linéaire. On admet toutefois différents diagrammes simplifiés de calcul.

Trois diagrammes sont admis pour le calcul des sections des éléments en BA : le plus simple est le diagramme rectangulaire. (MC-11.1.2).

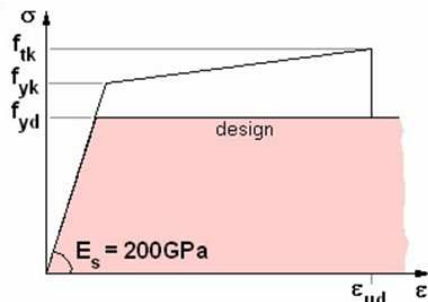


$$f_{cd} = 0.85 f_{ck} / \gamma_c \quad (f_{ck} \leq 50 \text{ MPa})$$

$$\epsilon_{cu3} = 3.5 \cdot 10^{-3} \quad (\text{MC-11.1.2})$$

$\gamma_c =$ coefficient de sécurité partiel du béton = 1.5

4.10.2 Acier des armatures



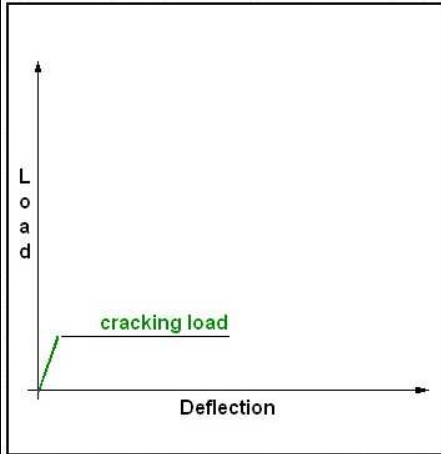
$\gamma_s =$ coefficient de sécurité partiel de l'acier des armatures = 1.15

Pour simplifier les calculs, on prend un diagramme avec palier horizontal.

Les barres à haute adhérence (HA) sont généralement en S500 ($f_{yk} = 500 \text{ MPa}$), donc $f_{yd} = 500 / 1.15 = 435 \text{ MPa}$.

4.11 Essai de flexion (Source : CALCRETE, The Concrete Centre)

We will now examine how a simply-supported reinforced concrete beam behaves when loaded. The load-deflection relationship is idealised.



Phase 1

As the load is applied the concrete and the steel behave homogeneously (as one) until the concrete in tension at the bottom of the beam cracks.



This is a fundamental principle of reinforced concrete design and does not signify failure, although if the beam was not reinforced it would fail at this point.

The widths of the cracks are very important, however, and must be controlled. This is both for reinforcement protection and appearance.

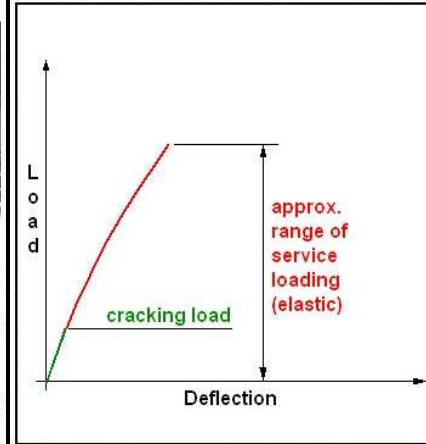
Phase 2

As the load is increased so the deformation becomes greater; more cracks appear along the beam and the cracks lengthen towards the top of the beam. The concrete in the tension zone is now largely ineffective.



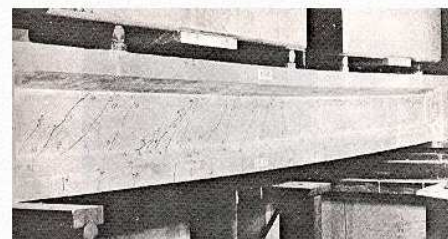
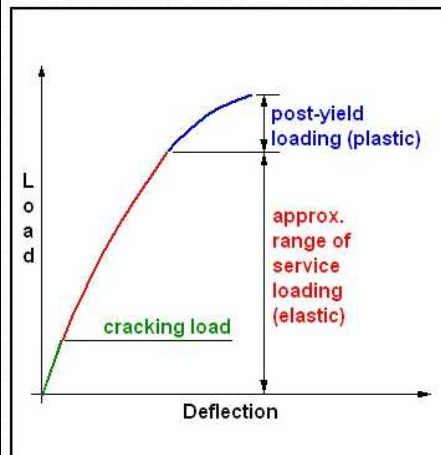
But the concrete in compression at the top of the beam and the steel in tension at the bottom behave elastically until the strains reach critical values.

This phase generally extends beyond serviceability conditions (the actual loading the structure will experience during its 'design' life).



Phase 3

Increasing the load further causes the steel in the tension zone to yield and become plastic at the position of maximum bending moment.....

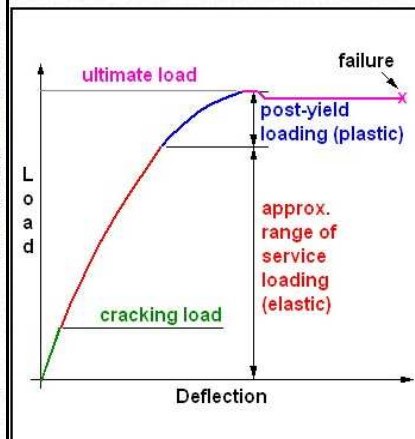


or causes the concrete in the compression zone to develop longitudinal cracks or possibly both.

The vertical deflection is very noticeable at this stage.

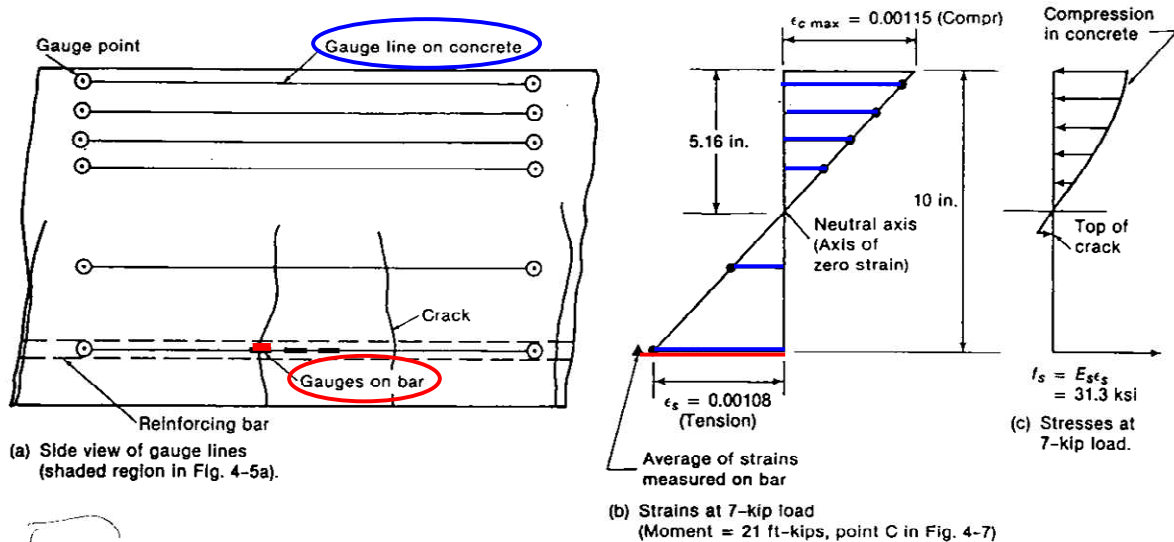
Phase 4

When the ultimate load is reached the beam will continue to deform with no further increase in the load until failure occurs, either by tensile failure of the steel in the bottom of the beam, or by compression failure of the concrete in the top of the beam.



4.12 Mesures des déformations

Des jauges de déformation (strain gauges) ont été collées, dans une section de la poutre en béton, sur la face extérieure, ainsi que sur les armatures. Les résultats des mesures, alors que la poutre est fissurée, est reproduit sur la figure suivante :



On peut conclure de ces mesures :

- que les déformations sont alignées selon une droite, donc que les sections droites restent planes au cours de la déformation,
- que les déformations mesurées sur l'armature et sur le béton situé au même niveau sont identiques, donc il y a compatibilité des déformations (Cela veut dire qu'il n'y a pas de glissement relatif entre le béton et l'armature adjacente : c'est pour cela que les armatures sont crénelées (armature à haute adhérence))

4.13 Analyse mathématique du comportement en flexion d'une poutre de section rectangulaire en béton armé sans armatures comprimées

4.13.1 Phase 1 : stade élastique non fissuré

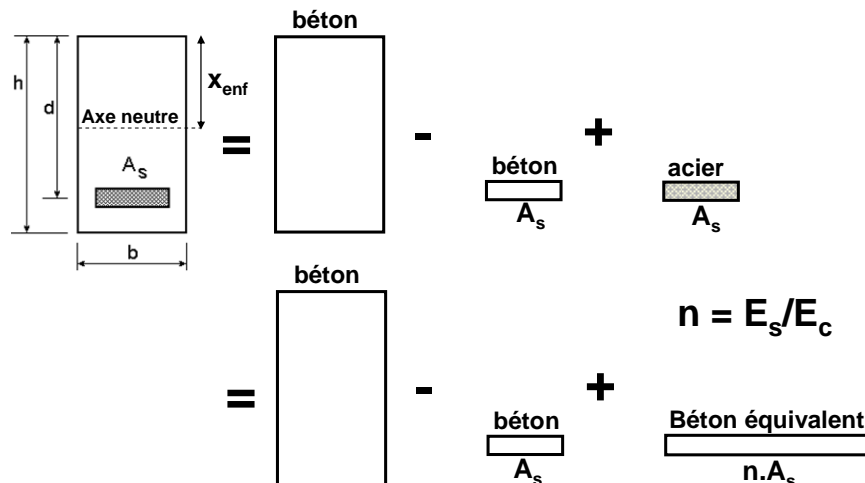
Le béton n'étant pas encore fissuré, toutes les fibres de béton reprennent des contraintes. La section est constituée de deux matériaux. Dans le cours de Résistance des Matériaux, on a montré que l'on peut calculer la position du centre de gravité, l'inertie et les contraintes en transformant la section mixte en une section homogène équivalente (ici l'acier va être transformé en béton équivalent).

Le béton équivalent à A_s doit transmettre le même effort, or sa déformation est ϵ_s .

$$N_c = A_{c, \text{equiv}} \sigma_c = A_{c, \text{equiv}} E_c \epsilon_s = A_s E_s \epsilon_s \Rightarrow A_{c, \text{equiv}} = \frac{E_s}{E_c} A_s = n \cdot A_s$$

Par conséquent, pour transformer l'acier en béton équivalent il faut multiplier la section d'acier par $n = E_s / E_c$.

Par ailleurs, là où se trouvent les armatures, il n'y a pas de béton !



On réalise alors un tableau comme celui-ci, en prenant comme origine des x la fibre supérieure de la section :

	A_i	x_i	$x_i A_i$	I	$x_i - x_{enf}$	$(x_i - x_{enf})^2 A_i$
Béton	bh	$h/2$	$bh^2/2$	$bh^3/12$	$(h/2 - x_{enf})$	$(h/2 - x_{enf})^2 bh$
Acier	$(n-1)A_s$	d	$d(n-1)A_s$	---	$(d - x_{enf})$	$(d - x_{enf})^2 (n-1)A_s$

Puis on calcule la position du CG et l'inertie de la section homogénéisée en béton équivalent :

$$x_{enf} = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i} = \frac{\frac{bh^2}{2} + (n-1)A_s d}{bh + (n-1)A_s}$$

$$I_{enf} = \sum I_i + \sum (x_i - x_{enf})^2 A_i = \frac{bh^3}{12} + \left(\frac{h}{2} - x_{enf}\right)^2 bh + (d - x_{enf})^2 (n-1)A_s$$

Le calcul des contraintes dans le béton en stade élastique non fissuré, sous un moment M_{enf} s'obtient directement par :

$$\text{fibre supérieure : } f_c = \frac{M_{enf} \cdot x_{enf}}{I_{enf}} \text{ et}$$

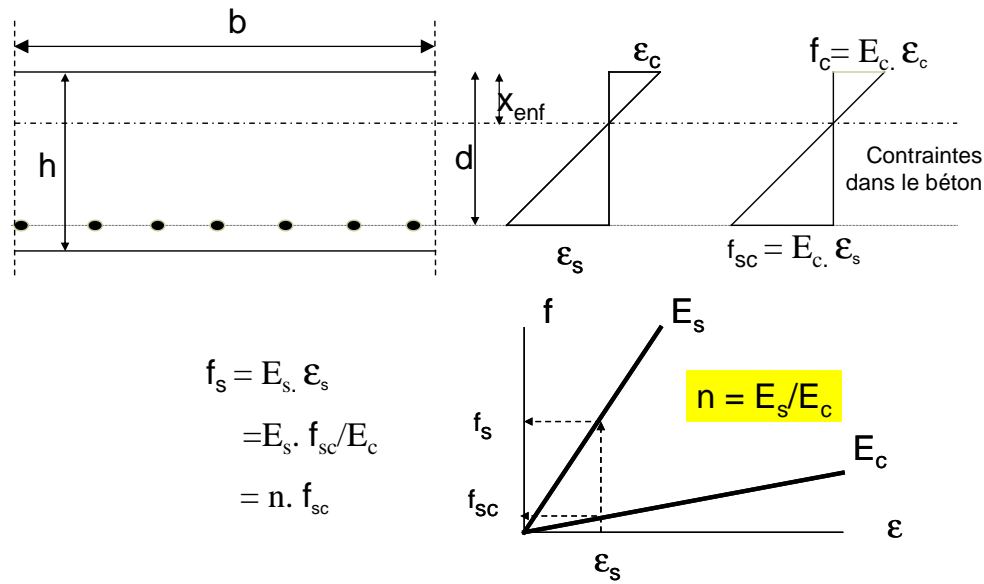
$$\text{fibre inférieure : } f_{ct} = \frac{M_{enf} \cdot (h - x_{enf})}{I}$$

Pour le calcul des contraintes dans l'armature, il faut retransformer le béton équivalent des armatures en acier :

$$\text{contrainte dans le béton équivalent au niveau des armatures : } f_{sc} = E_c \cdot \varepsilon_c = \frac{M_{enf} \cdot (d - x_{enf})}{I_{enf}}$$

Or la déformation dans le béton adjacent aux armatures = déformation des armatures : $\varepsilon_c = \varepsilon_s$

Donc, la contrainte dans les armatures vaut : $f_s = E_s \cdot \varepsilon_s = E_s \cdot f_{sc} / E_c = n \cdot f_{sc}$



$$f_s = n \cdot \frac{M_{enf} \cdot (d - x_{enf})}{I_{enf}}$$

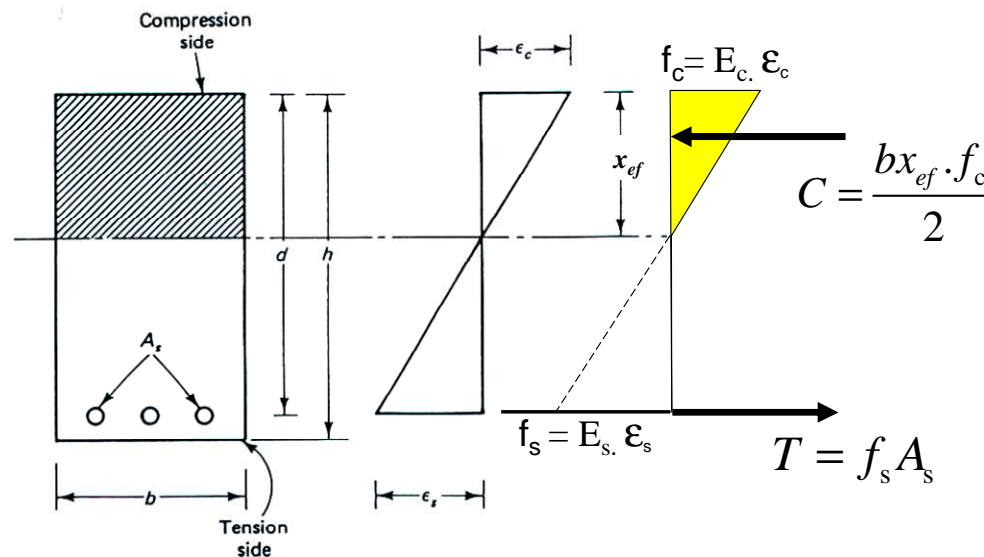
4.13.1.1 Calcul simplifié

Les sections d'acier étant faibles, on obtient en général un très bon calcul approché en négligeant celles-ci et en ne considérant que la section de béton brute.

On a alors : $x_{enf} = h/2$ et $I_{enf} = b \cdot h^3 / 12$

Et les contraintes dans le béton : $f_c = f_t = 6 \cdot M_{enf} / (b \cdot h^2)$

4.13.2 Phase 2 : stade élastique fissuré



La section est fissurée. Pour simplifier, on considère que tout le béton en traction ne reprend aucune contrainte (on néglige la zone en traction où la contrainte de traction est comprise entre 0 et f_{ctm}).

Par conséquent, la section n'étant soumise qu'à flexion pure, la résultante des efforts de compression doit équilibrer la résultante des efforts de traction repris par les seules armatures.

$$T = C \rightarrow f_s A_s = \left(\frac{x_{ef} b}{2} \right) f_c$$

Par hypothèse, le béton en compression et l'acier sont toujours élastiques. Donc, on a :

$$f_c = E_c \cdot \varepsilon_c \quad \text{et} \quad f_s = E_s \cdot \varepsilon_s$$

Donc, en remplaçant dans l'expression précédente : $E_s \varepsilon_s A_s = x_{ef} b \frac{E_c \varepsilon_c}{2}$

$$\text{Ou encore : } \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_s} = \left(\frac{E_s}{E_c} \right) \left(\frac{2A_s}{x_{ef} b} \right) = \frac{2nA_s}{x_{ef} b}$$

D'autre part, comme nous l'avons vu au 4.5 :

- les sections restent planes,
- il y a compatibilité des déformations entre les armatures et le béton qui les entoure.

Par conséquent, le diagramme des déformations nous permet d'appliquer la règle des triangles semblables :

$$\frac{\varepsilon_s}{d - x_{ef}} = \frac{\varepsilon_c}{x_{ef}}$$

Donc : $\frac{x_{ef}}{d - x_{ef}} = \frac{2nA_s}{x_{ef} b}$ ce qui peut être réécrit

$$x_{ef}^2 + \left(\frac{2nA_s}{b} \right) x_{ef} - \left(\frac{2nA_s}{b} \right) d = 0$$

Utilisons le rapport de la section d'acier à la section de béton ("pourcentage" d'armature).

$$\rho = \frac{A_s}{bd} \longrightarrow x_{ef}^2 + 2n\rho d x_{ef} - 2n\rho d^2 = 0$$

$$\left(\frac{x_{ef}}{d} \right)^2 + 2n\rho \left(\frac{x_{ef}}{d} \right) - 2n\rho = 0$$

Cette équation du second degré en x_{ef}/d admet comme racines :

$$\left(\frac{x_{ef}}{d} \right) = \frac{-2n\rho \pm \sqrt{(2n\rho)^2 + 8n\rho}}{2} \quad \text{dont la valeur positive est la seule qui est réaliste :}$$

$$\left(\frac{x_{ef}}{d} \right) = \sqrt{(n\rho)^2 + 2n\rho} - n\rho$$

L'inertie de la section fissurée se calcule alors par :

$$I_{ef} = \frac{bx_{ef}^3}{12} + bx_{ef} \left(\frac{x_{ef}}{2} \right)^2 + (d - x_{ef})^2 nA_s = \frac{bx_{ef}^3}{3} + (d - x_{ef})^2 nA_s$$

Et les contraintes dans la fibre supérieure de béton et dans l'armature :

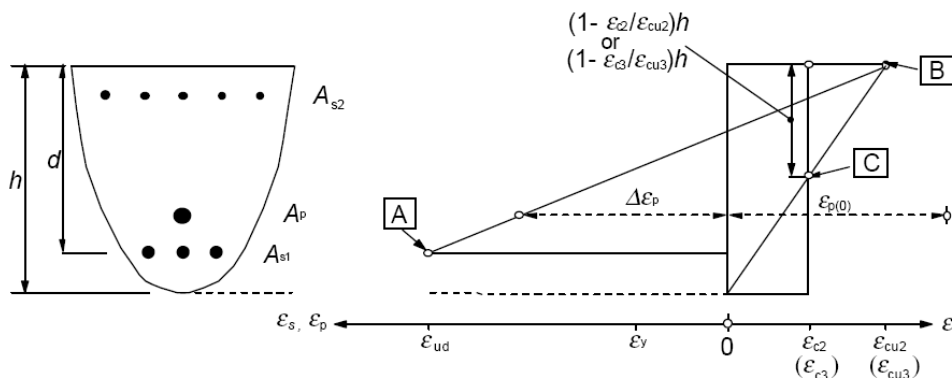
$$f_c = \frac{M_{ef} \cdot x_{ef}}{I_{ef}} \quad f_s = n \cdot \frac{M_{ef} \cdot (d - x_{ef})}{I_{ef}}$$

4.13.3 Phase 3 : stade plastique

Ce domaine n'est intéressant que par son stade ultime : la rupture

4.13.4 Phase 4 : rupture

L'Eurocode 2 définit sur la Figure 6.1 les valeurs limites des déformations relatives admissibles dans le béton et les armatures d'une section en béton armé à l'état limite ultime.



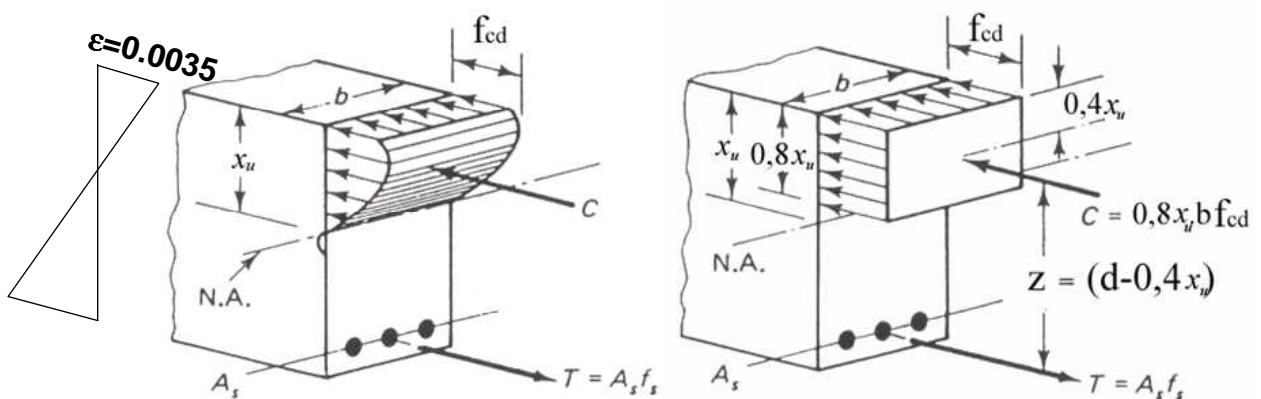
- A** - limite de déformation relative en traction des armatures de béton armé
- B** - limite de déformation relative du béton en compression
- C** - limite de déformation relative du béton en compression pure

Figure 6.1 : Diagramme des déformations relatives admissibles à l'état-limite ultime

Dans le cas de la flexion pure, le diagramme des déformations extrême passe par les points A et B. La déformation maximale en compression dans le béton (voir 4.3.1) vaut $\epsilon_{cu3} = 3.5 \cdot 10^{-3}$ pour des bétons de classe de résistance inférieure ou égale à C50/60.

La déformation maximale en traction dans l'armature est en principe infinie quand on choisit un diagramme simplifié conforme au 4.3.2, mais est limitée à $10 \cdot 10^{-3}$ en pratique.

La figure suivante montre le diagramme des déformations et des contraintes réelles dans la section, ainsi que le diagramme idéalisé rectangulaire limité à 80% de la hauteur comprimée (voir 4.3.1).



Avec le diagramme rectangulaire simplifié, et en supposant l'armature plastifiée ($f_s=f_{yd}$), ce qui est toujours préférable pour avoir une ruine ductile qui « prévient », on peut calculer le moment résistant M_{rd} de la poutre.

En effet, comme la poutre est soumise à flexion pure, on a :

- $C=T$ (équilibre de translation),
- $M_{rd}=T.z=C.z$ (équilibre moment).

La première équation conduit à :

$$x_u = \frac{A_s f_{yd}}{0.8 b f_{cd}}$$

Et la seconde à :

$$M_{rd} = T(d - 0.4x_u)$$

Vérification que les armatures sont bien plastifiées : il faut $\varepsilon_s > \varepsilon_y = \frac{f_{yd}}{E_s} = 435/200000 = 0.002175$.

$$\text{Or : } \frac{\varepsilon_s}{d - x_u} = \frac{\varepsilon_c}{x_u} \Rightarrow \varepsilon_s = \frac{0.0035 \cdot (d - x_u)}{x_u} = \frac{0.0035 \cdot (1 - \frac{x_u}{d})}{\frac{x_u}{d}}$$

Pour assurer une ductilité suffisante, l'EC2 impose, en flexion simple, une limite au rapport x_u/d :

$(x_u/d) \leq 0,45$ pour des bétons de classe de résistance $\leq C35/45$ et

$(x_u/d) \leq 0,35$ pour des bétons de classe de résistance $\geq C40/50$.

Même dans le cas $(x_u/d) \leq 0,35$, on a $\varepsilon_s = 0.0065 > 0.002175$, donc les armatures sont toujours plastifiées si on respecte cette condition de l'Eurocode.

4.14 Références

1. Reinforced Concrete - Mechanics and Design, J. MacGregor and J. Wight, 4th Edition, Prentice Hall