Exercice 1 : (Extrema, convexité)

On considère les fonctions suivantes définies de R dans R :

- $f_0(x) = x^2$
- $f_1(x) = x^2(x-1)^2$
- $f_2(x) = |x|$
- $f_3(x) = \cos(x)$
- $f_4(x) = |\cos(x)|$
- $f_5(x) = e^x$

Pour chacune des fonctions suivantes, répondre aux questions suivantes :

1. Etudier la différentiabilité et la (stricte) convexité de la fonction.
2. La fonction admet-elle un minimum global sur R ; Si oui, ce minimum est-il unique ? Le cas échéant, calculer ce minimum.

Exercice 2 : (Conditions d'optimalité)

Soit E un espace vectoriel et f est une fonction définie de E dans R.

1- Donner la condition suffisante d'existence de $\alpha \in E$ tel que $f(\alpha) = \max_{x \in E} f(x)$.

2- Donner la condition suffisante d'existence et d'unicité de $\alpha \in E$ tel que $f(\alpha) = \max_{x \in E} f(x)$.

Exercice 3 : (Optimisation sans contrainte)

Optimiser les fonctions de deux variables suivantes et déterminer la nature des points critiques (maximum (minimum) local (global), point selle) :

- $f_1(x,y) = x^2 + y^2 + 3xy - y$
- $f_2(x,y) = x^4 + y^4 - x^2y^2 - y^2$
- $f_3(x,y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$
- $f_4(x,y) = y(x^2 + (\ln(y))^2)$ sur $R *]0, +\infty[$
- $f_5(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$