CALCULS TOPOMETRIQUES

Chapitre 6

CALCUL DES SURFACES ET VOLUMES

Institut des Sciences et Techniques Appliquées
Année Universitaire 2024/2025

Chargé du cours **MELOUKA Smaïn**

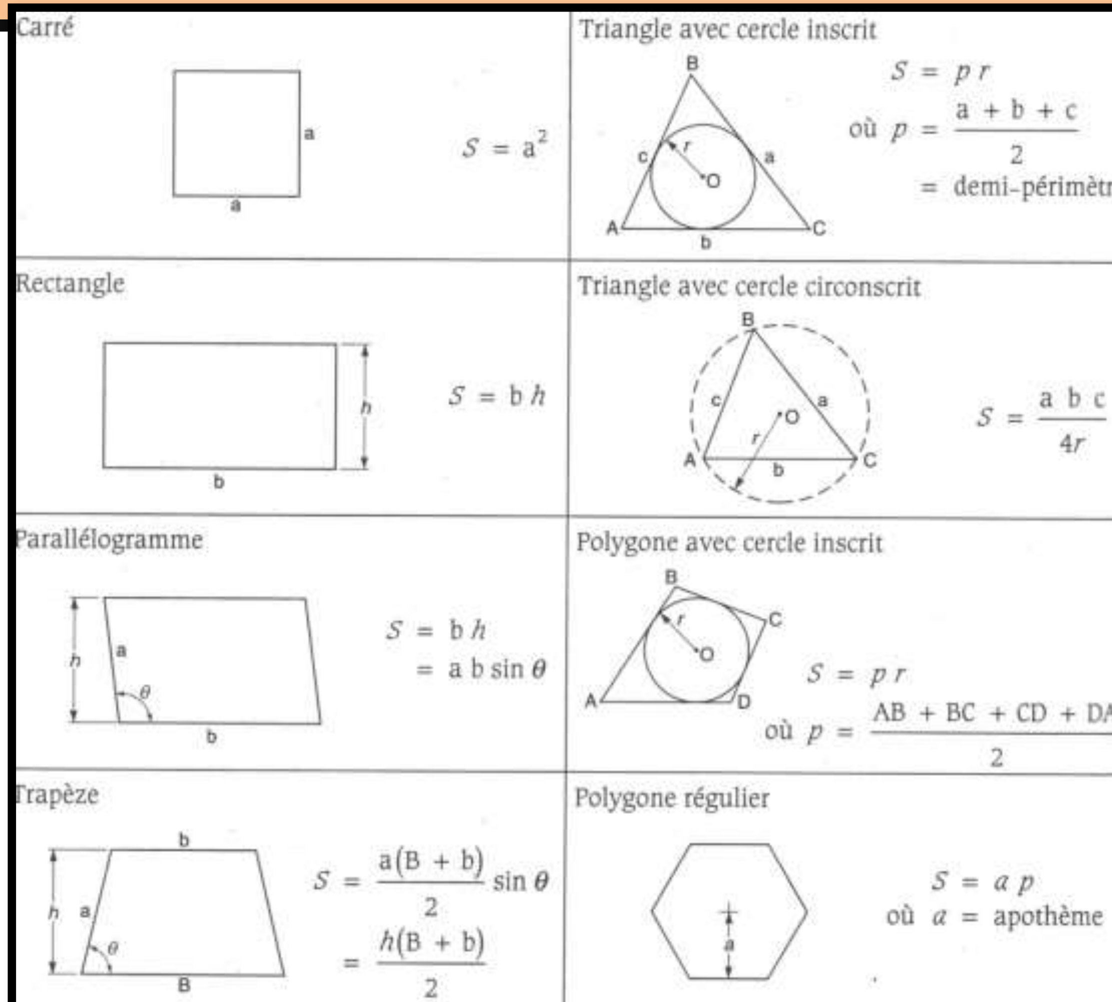
GÉNÉRALITÉS

Le calcul de la surface constitue une des opérations importante du mesurage des propriétés. Dans ce chapitre, nous verrons différentes méthodes de calcul de la superficie. Le choix de la méthode dépend de la forme de la figure, des valeurs connues, des appareils de calcul disponibles et de la précision requise.

Les ingénieurs et géomètres sont souvent appelés à calculer des volumes d'excavation ou de remplissage, ou bien à déterminer la quantité de béton requise pour construire certains ouvrages. Des calculs de volumes sont également nécessaires pour l'évaluation de la capacité de réservoirs d'emmagasinement ou de la quantité de matériaux en vrac. Afin de résoudre ce type de problème, on fait souvent appel à l'informatique.

SURFACE

Figures courantes [1]

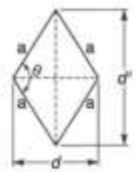


Carré $S = a^2$	Triangle avec cercle inscrit $S = p\,r$ où $p = \dfrac{a + b + c}{2}$ $=$ demi-périmètr
Rectangle $S = b\,h$	Triangle avec cercle circonscrit $S = \dfrac{a\ b\ c}{4r}$
Parallélogramme $S = b\,h$ $= a\,b \sin\theta$	Polygone avec cercle inscrit $S = p\,r$ où $p = \dfrac{AB + BC + CD + DA}{2}$
Trapèze $S = \dfrac{a(B + b)}{2} \sin\theta$ $= \dfrac{h(B + b)}{2}$	Polygone régulier $S = a\,p$ où a = apothème

SURFACE

Figures courantes [2]

Losange



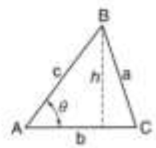
$$S = \frac{d\,d'}{2} = a^2 \sin\theta$$

Cercle

$$S = \pi r^2$$

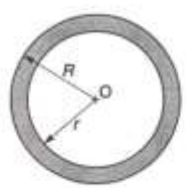
$$S_{secteur} = \pi r^2 \frac{\theta^\circ}{360^\circ} = r^2 \frac{\theta_{rad}}{2}$$

Triangle simple



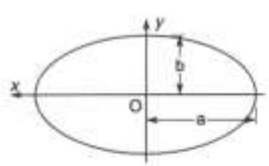
$$S = \frac{b\,h}{2} = \frac{b\,c\sin\theta}{2} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{où } p = \frac{a+b+c}{2}$$

Couronne



$$S = \pi\left(R^2 - r^2\right)$$

Ellipse



$$S = \pi\,ab$$

MELOUKA Smaïn, smain.melouka@univ-tlemcen.dz

SURFACE

Mesure sur plan

Mesure sur support papier

- Pour des estimations, des avant-projets, des documents cadastraux, etc., la mesure d'une surface sur un plan existant peut être suffisante. Il faut garder à l'esprit qu'en raison du jeu dimensionnel du papier et des imprécisions de retranscription sur calque, la valeur obtenue n'est qu'indicative.
- Un appareil tel que le planimètre polaire permet de mesurer une surface directement sur un plan en parcourant son contour.
  La précision obtenue peut être de 1/3 000, soit 3 m² pour une surface de 10 000 m².
- Une autre solution est de digitaliser le plan et d'utiliser les fonctions de calcul comme la commande *AIRE d'AutoCAD.*

Mesure sur support informatique

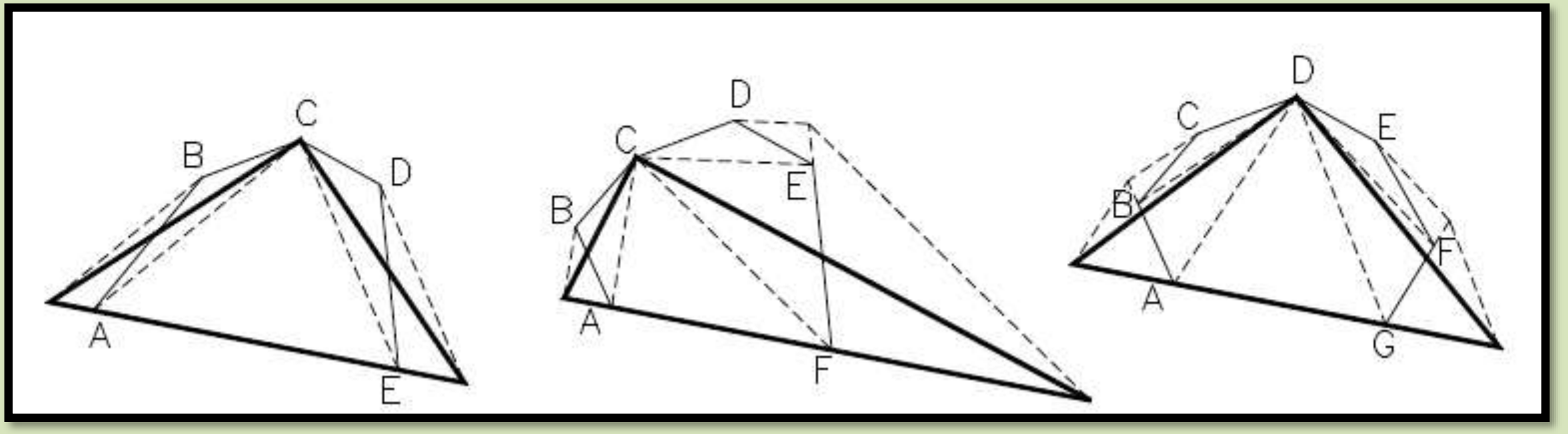
L'avantage du support informatique est de conserver intactes les données d'un plan ; ainsi, la précision de la surface obtenue n'est tributaire que de la précision du lever de détails. Sur AutoCAD, la commande *AIRE permet d'obtenir rapidement une surface* délimitée par des arcs de cercle et des droites.

SURFACE

Détermination graphique

Les méthodes graphiques permettent de vérifier rapidement l'ordre de grandeur d'une superficie. Il existe trois façon de procéder.

1. **Le terrain peut se composer de triangles et de trapèzes, dont on mesure à l'échelle les bases et les hauteurs. Lorsqu'une limite est irrégulière, on peut la remplacer par une droite de redressement, de telle sorte que la mesure demeure la même.**
2. **On peut faire la mise en plan à l'échelle sur une feuille quadrillée, puis compter les carrés.**
3. **Il est possible de transformer le polygone en un triangle équivalent, puis de mesurer à l'échelle la base et la hauteur.**



MELOUKA Smaïn, smain.melouka@univ-tlemcen.dz

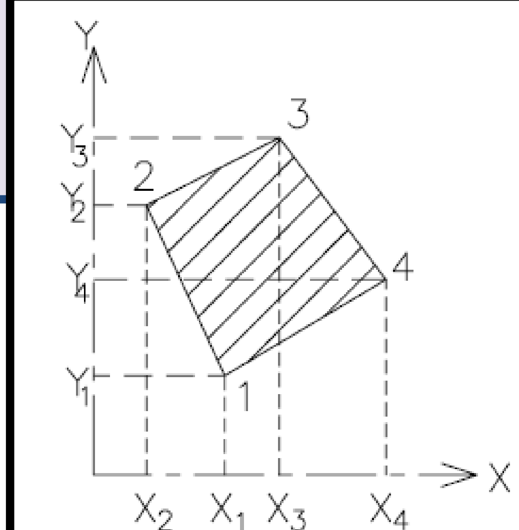
SURFACE

Méthode des coordonnées rectangulaires

Soit un polygone de *n sommets dont chacun est* connu par ses coordonnées rectangulaires (*Xi ; Yi).* La figure présente un exemple avec *n = 4. La* surface de ce polygone s'exprime de deux manières équivalentes :

$$S = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{i=n} X_i (Y_{i-1} - Y_{i+1})$$

$$S' = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{i=n} Y_i (X_{i-1} - X_{i+1})$$



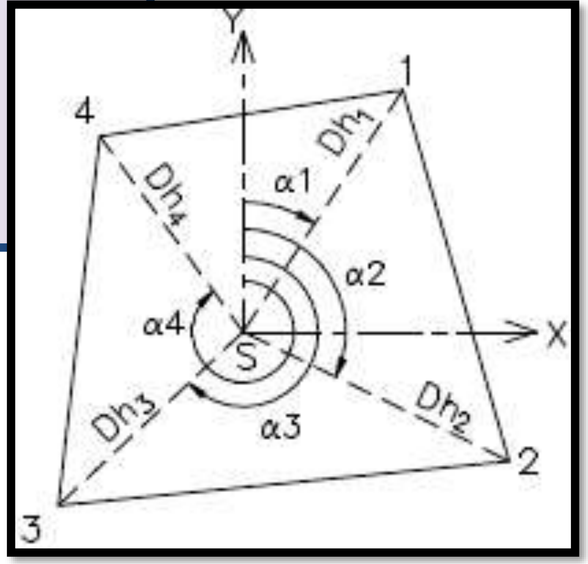
- **Si la surface *S est positive, alors la surface S' est négative et inversement. On doit* donc toujours vérifier que *S'+ S = 0***
- **Lors de la rotation des indices *i, on applique la convention suivante :***

$$X_0 = X_n \; ; \; Y_0 = Y_n \; ; \; X_{n+1} = X_1 \; ; \; Y_{n+1} = Y_1$$

SURFACE

Méthode des coordonnées polaires

On découpe la surface totale du polygone de n côtés en n triangles partant tous du sommet S. On peut en déduire la surface en projection horizontale d'un polygone de n côtés par la formule suivante :



$$S = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{i=n} Dh_i \cdot Dh_{i+1} \cdot \sin(\alpha_{i+1} - \alpha_i)$$

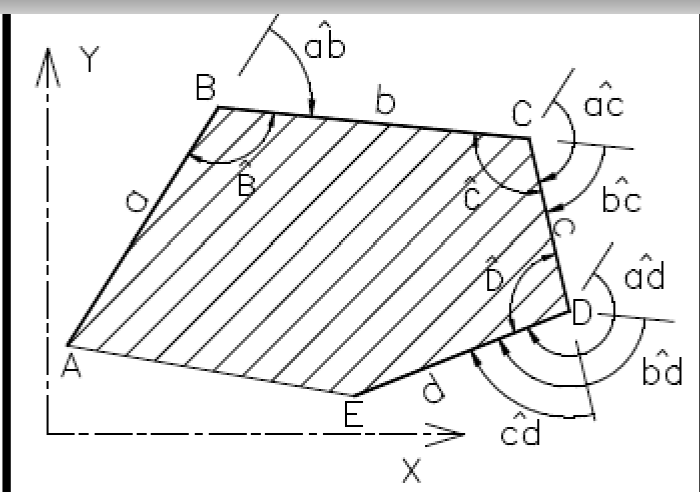
- **Par convention** $\alpha_{n+1} = \alpha_1$ et $Dh_{n+1} = Dh_1$
- **Si la station S est située à l'extérieur du polygone, la formule est également applicable. Il apparaît alors dans le calcul des surfaces négatives dont il faut conserver le signe dans la somme de la formule générale**

SURFACE

Formule de SARRON [1]

Soit un polygone de *n côtés. Si l'on connaît la longueur de n –1 côtés et la mesure des n – 2 angles entre ces côtés, on peut calculer la surface du polygone par la formule :*

$$S = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} ab\cdot\sin\widehat{ab} + ac\cdot\sin\widehat{ac} + ad\cdot\sin\widehat{ad} + \ldots \\ + bc\cdot\sin bc + bd\cdot\sin\widehat{bd} + \ldots \\ + cd\cdot\sin\widehat{cd} + \,.. \end{bmatrix}$$



- $a, b, c, d, \ldots$ représentent les $n - 1$ côtés connus.
- $\widehat{ab}$ est l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$. $\widehat{ab}$ est aussi le complémentaire de l'angle interne au sommet B (noté $\widehat{B}$) : $\widehat{ab} = 200 - \widehat{B}$
- $\widehat{ab}, \widehat{ac}, \widehat{ad}, \widehat{bc}, \widehat{bd}$, etc. représentent les $n - 2$ angles dirigés entre les $n - 1$ côtés de longueur connue.
- Les angles dirigés s'additionnent : $\widehat{ac} = \widehat{ab} + \widehat{bc}, \widehat{ad} = \widehat{ac} + \widehat{cd}$, etc.

MELOUKA Smaïn, smain.melouka@univ-tlemcen.dz

SURFACE

Formule de SARRON [2] - Démonstration

On découpe le quadrilatère en deux triangles ABD et BCD dont les surfaces se calculent comme suit :

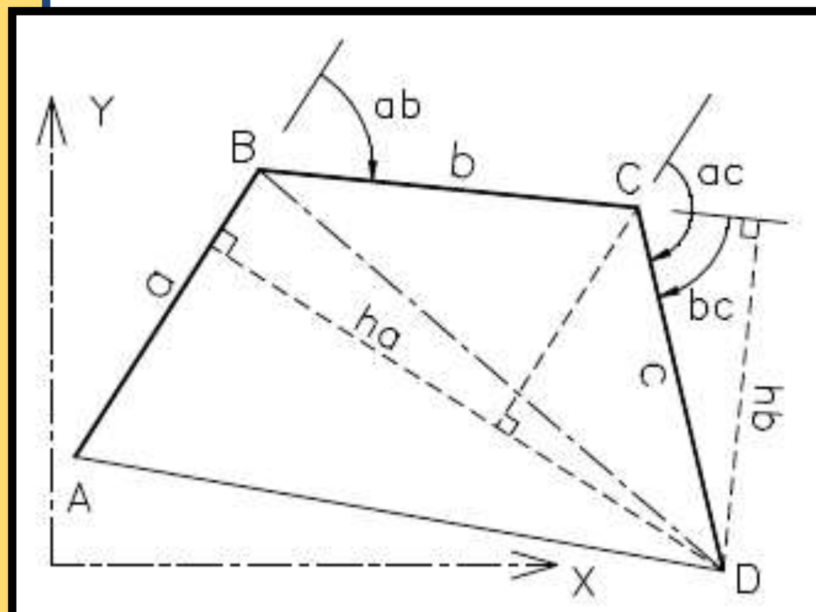
$$2.S_{ABD} = a.h_a = a.[b.\sin\widehat{ab} + c.\sin(200 - \widehat{ac})].$$

$$2.S_{BCD} = b.h_b = b.c.\sin\widehat{bc}.$$

On obtient finalement la formule de Sarron pour un quadrilatère :

$$2.S = a.b.\sin\widehat{ab} + a.c.\sin\widehat{ac} + b.c.\sin\widehat{bc}$$

La démonstration pour un polygone à n côtés peut être faite sur le même principe.



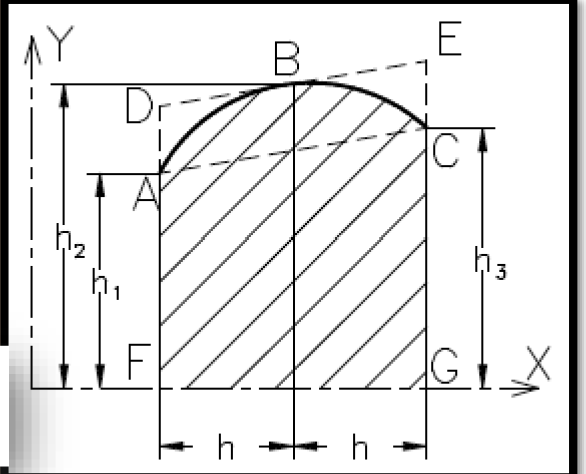
SURFACE

Formule de SIMPSON [1]

Soit à calculer la surface délimitée par l'arc de parabole AC (d'axe vertical) et l'axe des abscisses *X*. L'arc est découpé en deux parties AB et BC telles que les projections de A, B et C sur l'axe des abscisses *X soient équidistantes d'une valeur h.*

On utilise la propriété de la parabole suivante : la surface délimitée par l'arc de parabole ABC et la droite AC est égale au deux tiers de la surface du parallélogramme circonscrit ADEC ; la surface hachurée FABCG a donc pour valeur :

$$S = \left(\frac{h_1 + h_3}{2}\,2h\right) + \frac{2}{3}\left(2hh_2 - 2h\,\frac{h_1 + h_3}{2}\right) = \frac{h}{3}(h_1 + 4h_2 + h_3)$$



En généralisant à une suite de n intervalles équidistants de h :

$$S = \frac{h}{3}(h_1 + 4h_2 + h_3) + \frac{h}{3}(h_3 + 4h_4 + h_5) = \frac{h}{3}(h_1 + h_5 + 4h_2 + 2h_3)$$

MELOUKA Smaïn, smain.melouka@univ-tlemcen.dz

SURFACE

Formule de SIMPSON [2]

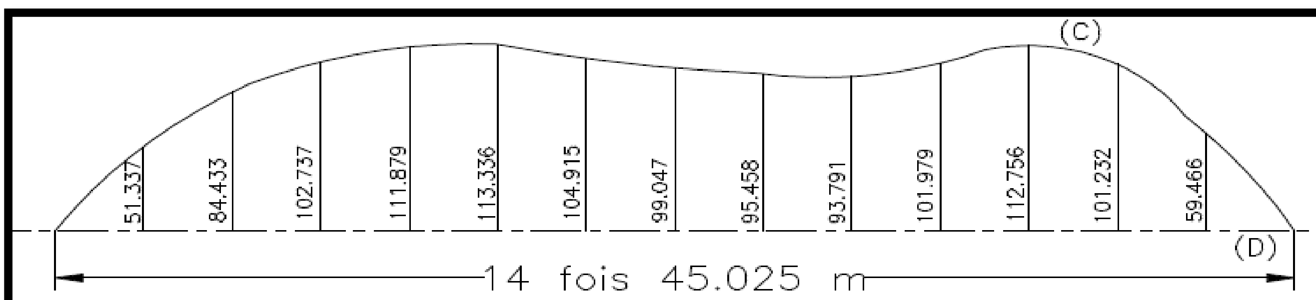
En généralisant à une suite de n intervalles équidistants de h :

$$S = \frac{h}{3}\left(h_1 + h_{n+1} + 4\sum h_{pair} + 2\sum h_{impair}\right)$$

Le nombre n d'intervalles doit être pair. S'il est imposé impair, le dernier tronçon est calculé à part (par exemple en le divisant en deux).

On peut appliquer cette formule à la détermination de la superficie délimitée par une courbe quelconque découpée en n tronçons égaux. Plus le découpage est serré, meilleure est la précision.

Cette formule est peu utilisée.



SURFACE

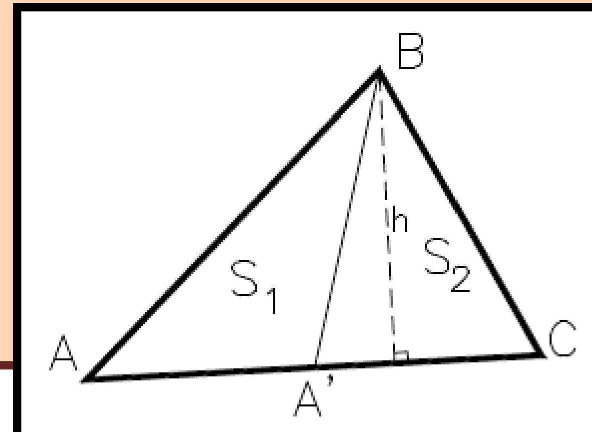
Division de surface [1] Quelques cas

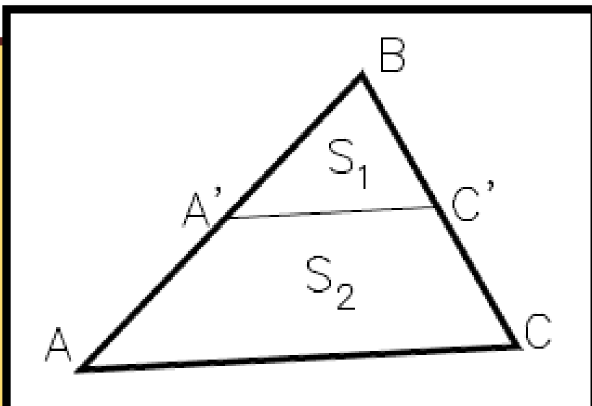
Limite divisoire passant par le sommet d'un triangle

$$h = 2 \cdot \frac{S_1 + S_2}{AC}.$$

$$AA' = 2S_1 / h$$

$$AA' = AC\,\frac{S_1}{S_1 + S_2}.$$





Limite divisoire parallèle à un côté d'un triangle

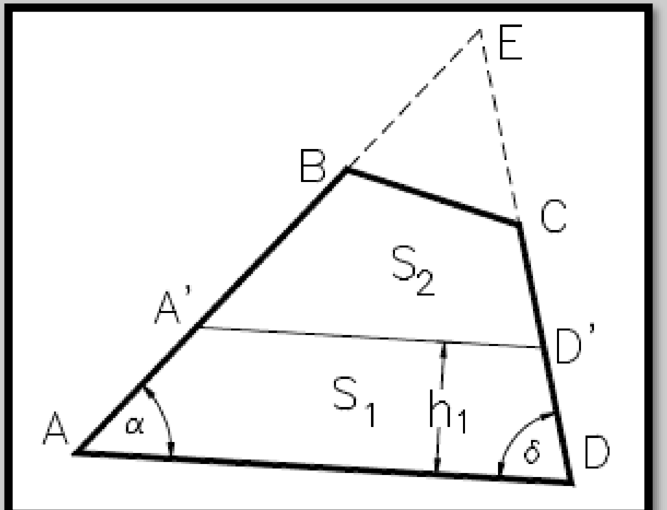
$$k_1 = \frac{S_1}{S_{ABC}} = \frac{BC'^2}{BC^2} = \frac{BA'^2}{BA^2} = \frac{A'C'^2}{AC^2}$$

$$BA' = BA\sqrt{k_1} \text{ et } BC' = BC\sqrt{k_1}$$

SURFACE

Division de surface [2] Quelques cas

Limite divisoire parallèle à un côté d'un quadrilatère



$$AA' = AE\sqrt{\frac{S_1}{S_1 + S'_2}} \quad \text{et} \quad DD' = DE\sqrt{\frac{S_1}{S_1 + S'_2}}$$

$$S'_2 = S_2 + S_{EBC}$$

$$2.S_{AED} = \frac{AD^2}{\cot\alpha + \cot\delta}$$

$$2.S_{A'ED'} = 2.(S_{AED} - S_1) = \frac{A'D'^2}{\cot\alpha + \cot\delta}$$

$$A'D' = \sqrt{AD^2 - 2S_1(\cot\alpha + \cot\delta)}$$

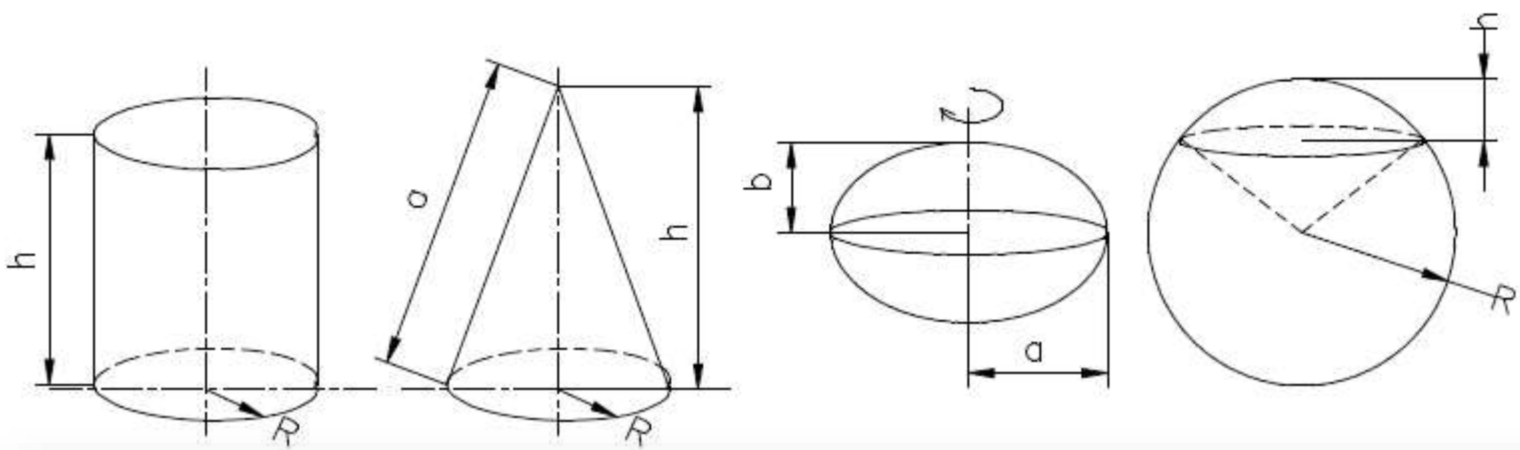
$$2.S_1 = h_1.(A'D' + AD)$$

$$AA' = h_1/\sin\alpha \qquad DD' = h_1/\sin\delta$$

MELOUKA Smaïn, smain.melouka@univ-tlemcen.dz

VOLUME

SOLIDES RÉGULIERS



Cylindre de section droite circulaire : $V = \pi.R^2.h$ $S = 2.\pi.R.h$

Cône de base circulaire : $V = h.R^2\ .\ \pi / 3$ $S = \pi.a.R$

Ellipsoïde de révolution : $V = 4 / 3.\pi.a^2.b$

Sphère, secteur et segment sphérique : $V_{\text{sphère}} = 4 / 3.\pi.R^3$ $S_{\text{sphère}} = 4.\pi.R^2$

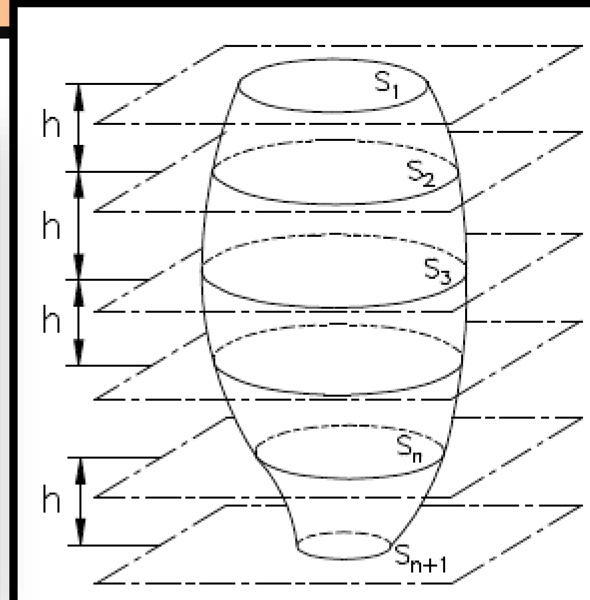
$V_{\text{secteur}} = 2 / 3.\pi.R^2.h$ $S_{\text{calotte}} = 2.\ \pi.R.h$

$V_{\text{segment sphérique}} = \pi / 3.h^2.(3R - h)$

MELOUKA Smaïn, smain.melouka@univ-tlemcen.dz

VOLUME

Volume quelconque par la méthode de Simpson



Le volume est découpé en n tronçons par $n+1$ plans parallèles et équidistants d'une hauteur h. La hauteur totale est donc $H = n.h$.

Le nombre de tronçons doit être pair. S'il est imposé impair, le dernier (ou le premier) tronçon doit être traité à part (par exemple en le découpant en deux).

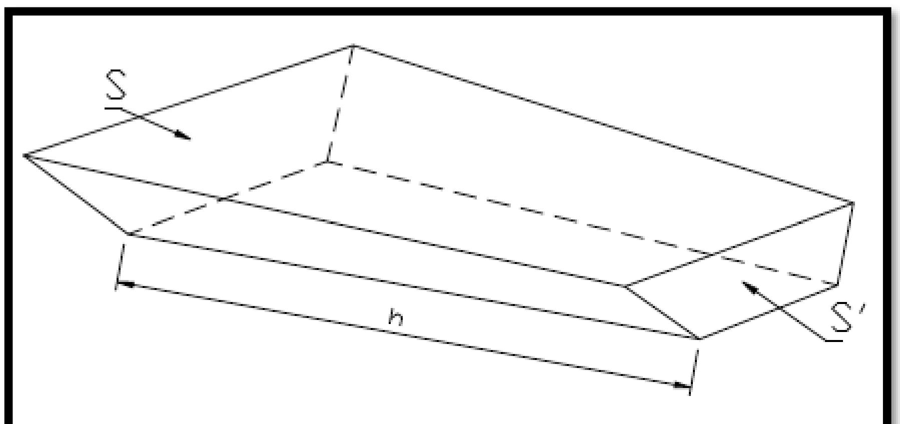
$$V = \frac{h}{3}\left(S_1 + S_{n+1} + 4\sum S_{pair} + 2\sum S_{impair}\right)$$

MELOUKA Smaïn, smain.melouka@univ-tlemcen.dz

VOLUME

Formule de la moyenne des bases

Dans le cadre de calculs de cubatures pour des mouvements de terre, il n'est pas utile d'effectuer un calcul exact des volumes de terre, les quantités de terre déplacées et les incertitudes sur les dimensions réelles des excavations et sur la connaissance du terrain naturel sont telles qu'il suffit d'un calcul approché pour rester dans la même marge d'erreur. On emploie alors la méthode de calcul suivante :



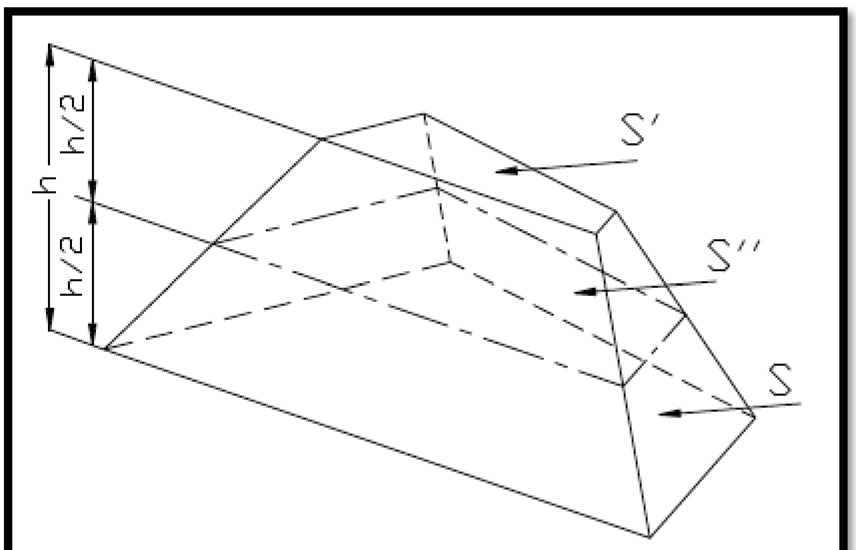
$$V = h\,\frac{S' + S}{2}$$

VOLUME

Formule des trois niveaux

Cette formule permet de calculer la plupart des volumes complexes (tronc de pyramide, tronc de cônes, segments sphériques, tas de sable, etc.) tel que :

- **les surfaces *S, S' et S'' sont parallèles entre elles ;***
- **les surfaces extrêmes *S et S'' sont distantes de la valeur h hauteur du volume ;***
- **la surface *S' est située à la demi-hauteur h/2.***



$$V = \frac{h}{6}(S + S' + 4S'')$$

VOLUME

Calcul par décomposition en volumes élémentaires

Le volume à décomposer doit être délimité par des surfaces planes régulières. Les volumes de base sont :

- la pyramide de surface de base S de volume :

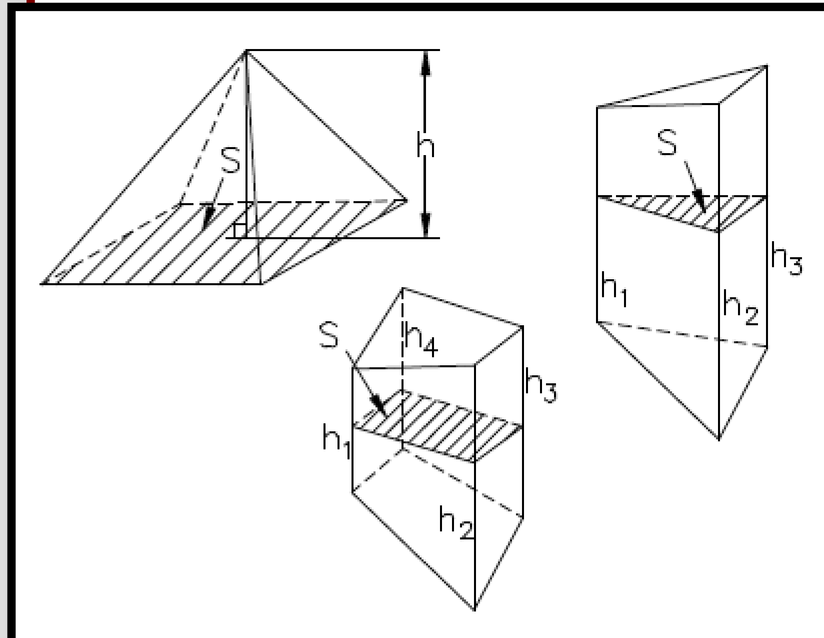
$$V = S \cdot h / 3$$

- le tronc de prisme de section droite triangulaire S de volume :

$$V = S \cdot (h_1 + h_2 + h_3) / 3$$

- le tronc de prisme dont la section droite est un parallélogramme de volume :

$$V = S \cdot (h_1 + h_2 + h_3 + h_4) / 4$$



MELOUKA Smaïn, smain.melouka@univ-tlemcen.dz