Chapitre 01 Les Nombres réels.

I : Notations

الأعداد الطبيعية

a) $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$: Ensemble des entiers naturels

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N} - \{0\}$.

b) $\mathbb{Z} = \{\dots ; -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2 \dots\}$ ensembe des entiers relatifs

الصحيحة أو النسبية

$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$, $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$

c) $\mathbb{D} = \{ \frac{a}{10^n} , a \in \mathbb{Z} , n \in \mathbb{N} \}$ ensemble des nombres décimaux

العشرية

" Un nombre décimal est un nombre réel dont la partie décimale est finie "

d) $\mathbb{Q} = \{ \frac{p}{q} , p \in \mathbb{Z} , q \in \mathbb{Z}^* \}$ ensemble des nombres rationnels

الأعداد الناطقة أو الكسرية

• Remarque " Rq "

Tout nombre réel admet une écriture décimal sous la forme :

$\boxed{\dots\dots , \dots\dots}$

Partie réelle — Partie décimale

Proposition 1

Un nombre est rationnel si et seulement s'il admet une partie décimale finie ou infinie périodique à partir d'un certain rang.

جزء عشري منته — أو غير منته ولكن دوري إبتداءا من رتبة ما

• Remarque Tout nombre rationnel s'écrit sous la forme $\frac{p}{q}$ ou $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$ et $p \wedge q = 1$ (c.à.d. $pgcd(p, q) = 1$, p et q sont premiers entre eux)

$\frac{p}{q}$ est irréductible.

Exemples

$\frac{3}{15} = \frac{1}{5} \in \mathbb{Q}$, $\frac{1}{3} = 0,\underline{3}\underline{3}\underline{3}\dots \in \mathbb{Q}$, $1,25 \in \mathbb{Q}$, $13,2\,\underline{75}\,\underline{75}\,\underline{75} \in \mathbb{Q}$

$e \simeq 2,718 \dots \notin \mathbb{Q}$ $\pi \simeq 3,14\,15\,9\,2\,6\,5 \dots \notin \mathbb{Q}$.

II Ensemble $\mathbb{R}$.

1- **Nombres Irrationnels** Il existe des nombres qui n'appartient ni à $\mathbb{N}$, ni à $\mathbb{Z}$ ni à $\mathbb{Q}$.

Proposition 2 $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ($\sqrt{2}$ est irrationnel)

× (Pour démontrer la proposition 2, on rappelle quelques notions importants

Rappel

البرهان بالخلف

- Démontration par L'absurde : On suppose le contraire de ce qu'on veut démontrer, puis on montre que cela mène à une contradiction. Et donc la proposition initiale est vraie
- Théorème d'Euclide. Si un nombre premier P divise le produit de entiers (a.b), alors (P divise a) ou (P divise b)

$$\text{si } \begin{cases} P \mid a.b \\ P \text{ est premier} \end{cases} \text{ alors } \Rightarrow (P \mid a) \text{ ou } (P \mid b)$$

- Théorème de Gauss.

$$\begin{cases} P \mid a.b \\ P \wedge b = 1 \end{cases} \text{ alors } P \mid a$$

⚠ $P \mid a$ veut dire a est multiple de P, c.à.d. $a = k.P$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

À expliquer seulement.

Euclide : si le produit (a.b) est multiple d'un nombre premier P alors soit (a est multiple de P) ou (b est multiple

Exemple. Si par exemple $p = 2$ (2 est premier) alors a.b est multiple de 2 ($2 \mid a.b$) implique forcement que soit a est multiple de 2, ou b multiple de 2

Gauss : (a.b) est multiple de p et $b \wedge p = 1$ alors a est multiple de p.

Exemple : $p = 7$, $b = 15$, $a.b = a.\underline{15} = \underline{7}k$ alors a doit être multiple de 7]

- Pour un bon raisonnement par l'absurde, il faut suivre les 5 étapes.

1- Définir clairement la prop que l'on veut démontrer
2- Supposer "temporairement" le contraire de cette prop.
3- Analyser les conséquences logiques de cette prop par une démonstration mathématique.
4- Identifier une contradiction ou une situation Absurde
5- Conclure que l'hypothèse est fausse, donc la proposition initiale est vraie.

- Preuve de la proposition 2.

Montrons que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Faison un raisonnement par L'absurde.

Supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, c.à.d $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ ou $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}^*$

$p \wedge q = 1$

$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow p = \sqrt{2} \cdot q$

$\Rightarrow p^2 = 2\ q \cdot q$ — P et q sont Premiers entre eux.

$\Rightarrow p \cdot p = 2 \cdot q \cdot q$ ... (*)

et $\begin{cases} 2 \text{ est premier.} \\ 2 \text{ divise } p \cdot p \end{cases}$ (donc d'après le Thm Euclide) 2 divise p (ou 2 divise p)

2 divise p veut dire il existe $k \in \mathbb{Z}$, tel que $p = 2 \cdot k$

(*) s'écrit $2k \cdot \cancel{2}k = \cancel{2}\, q \cdot q$

$2\, k \cdot k = q \cdot q$

2 divise q

On a donc 2 divise p et 2 divise q, c.à.d p et q ne sont pas premiers entre eux. D'où la contradiction avec $p \wedge q = 1$.

Conclusion. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. ($\sqrt{2}$ est irrationnel).

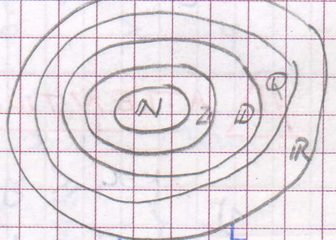
Exercices | supp $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$. Mq $\sqrt{3} + 2\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}$.
Mq $\sqrt{3}$ et $\sqrt{6}$ et $\log_2 3 \notin \mathbb{Q}$
$\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$ ou $n \geq 2$ est un nombre premier.

Remarques

a- La même preuve est valable pour démontrer que la racine carrée d'un nombre premier est irrationnelle.

b- $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\text{irrationnels}\}$ L'ensemble des nombres réels

On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.



Théorème (Densité des nombres rationnels et irrationnels dans $\mathbb{R}$)

- $\mathbb{Q}$ (Ensemble les nombres rationnels) est dense dans $\mathbb{R}$. c.à.d entre deux réels, il existe un rationnel. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \exists q \in \mathbb{Q}, x < q < y$.
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (Ensemble des irrationnels) est dense dans $\mathbb{R}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}, \exists p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, x < p < y$

Notations

a) $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$, $x \in \mathbb{R}^+$ est dit x est positif

$\mathbb{R}^{+*} = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$, $x \in \mathbb{R}^{-*}$ " " " strictement positif.

$\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 0\}$, $x \in \mathbb{R}^-$ " " est négatif.

$\mathbb{R}^{-*} = \{x \in \mathbb{R} / x < 0\}$, $x \in \mathbb{R}^{-*}$ " " " st^{t} négatif

b) Symboles mathématiques

$\forall$ signifie (pour tout $x \in E$), (quelque soit $x \in E$)

$\exists$ " (Il existe au moins un élément).

$\Rightarrow$, $(\Leftrightarrow)$, $\vee$, $\wedge$

2 - L'ordre sur $\mathbb{R}$: $\mathbb{R}$ est ordonné par la relation $\leq$ définie par :

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x \leq y)$ ssi $(x - y \in \mathbb{R}^-)$

$x - y \leq 0$

Propriétés :

1 - $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y$ ou $y \leq x$

2 - $\forall x, y, z$, $x \leq y \underset{ssi}{\Longleftrightarrow} x + z \leq y + z$.

3 - $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\forall z \in \mathbb{R}^+$, $x \leq y \Leftrightarrow x z \leq y z$

4 - $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\forall z \in \mathbb{R}^-$, $x \leq y \Leftrightarrow x z \geq y z$

5 - $\forall x, y \in \mathbb{R}^*$, $\underbrace{x \cdot y > 0}_{x \text{ et } y \text{ sont de même signe}}$, $x \leq y \Leftrightarrow \frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$

6 - $\forall x, y, a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x \leq y \\ a \leq b \end{cases} \Rightarrow x + a \leq y + b$$

ATTENTION aux erreurs suivantes (voir Tableau)

1) $\begin{cases} x \leq y \\ x' \leq y' \end{cases} \not\Rightarrow x - x' \not\leq y - y'$

Exemple : $\begin{cases} -3 \leq 1 \\ -3 \leq 6 \end{cases}$

$\underbrace{(-3)-(-3)}_{0} \not\leq \underbrace{1-6}_{-4}$

2) $\begin{cases} x \leq y \\ x' \leq y' \end{cases} \not\Rightarrow \frac{x}{x'} \leq \frac{y}{y'}$ car comparer une fraction demande de prendre en compte le signe et la grandeur du dénominateur.

$x', y' \in \mathbb{R}^*$

Exemple. $\begin{cases} 9 < 10 \\ 1 < 2 \end{cases} \not\Rightarrow \frac{9}{1} < \frac{10}{2}$

$\not\Rightarrow 9 < 5$

3) $\begin{cases} x \leq y \\ x' \leq y' \end{cases} \Rightarrow x \cdot x' \leq y y'$ est vrai seulement si x, y, x', y' sont strictement positifs.

Si non c'est faux

Exemple. $\begin{cases} -2 \leq 1 \\ -4 \leq -3 \end{cases}$

$(-2)(-4) \geq (-3)$

$8 \geq (-3)$

4) $x \leq y \not\Rightarrow \frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$, il faux que $x.y \geq 0$.

$(x, y) \notin \mathbb{R}^*$

Exemple. $\begin{cases} -1 < 2 \\ 4 < 5 \end{cases} \not\Rightarrow -\frac{1}{4} > \frac{2}{5}$

Résumé.

On suppose $\begin{cases} x \leq y \\ x' \leq y' \end{cases}$ avec $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$.

alors. ATTENTION aux erreurs suivantes

		Exemples
1) $x - x' \leq y - y'$	Faux	$\begin{cases} -3 < 1 \\ -3 \leq 6 \end{cases}$ Mais $(-3)-(-3) \geq -4$; $0 \geq -4$
2) $\frac{x}{x'} \leq \frac{y}{y'}$ $(x', y') \neq (0,0)$	Faux	$\begin{cases} 9 \leq 10 \\ 1 \leq 2 \end{cases}$ Mais $\frac{9}{1} \not\geq \frac{10}{2}$
3) $x.x' \leq y y'$	Vrais seulement si x, x' y, y' sont Positifs. Sinon, c'est faux	$\begin{cases} -2 \leq 1 \\ -4 \leq -3 \end{cases}$ $(-2)(-4) \geq -3$; $8 \geq -3$
4) $\frac{1}{x} \not\geq \frac{1}{y}$ $(x, y) \neq (0,0)$	Vrai si $x.y \geq 0$ Faux si $(x<0)$ et $(y>0)$	$-10 \leq 2$. Mais $-\frac{1}{10} \leq \frac{1}{2}$

2_2 Intervalles

Définition 1) Soit $x, y \in \mathbb{R}$. On appelle intervalle $I = [x,y]$, l'ensemble de tous les nombres délimités par x et y.

Autrement dit I est un intervalle ssi

$\forall x, y \in I$, et $\forall z \in \mathbb{R}$, si $x \leq z \leq y$ alors $z \in I$

On note $I \subset \mathbb{R}$.

2) Un intervalle borné est un intervalle dont les bornes (extrémités) sont finies

Définition

- La droite réelle achevée est l'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$ constituée de $\mathbb{R}$ auquel on ajoute deux éléments formels $+\infty$, et $-\infty$:

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

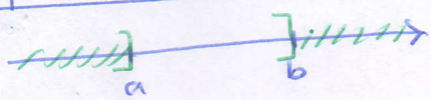
$\overline{\mathbb{R}}$ permet d'éviter de séparer le cas " un réel " et " l'infini " dans les énoncés.

Par exemple : les intervalles ouverts sont ceut ~~de~~ de la formes $]a, b[$ avec $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$

Rappel

L'intervalle est	Borné	non borné
ouvert	$]a,b[$	$]a,+\infty[$, $]-\infty,a[$; $\mathbb{R}$
fermé	$\{a\} = [a,a]$, $[a,b]$	$[a,+\infty[$; $]-\infty,a]$; $\mathbb{R}$
semi ouvert ou semi fermé	$]a, b]$, $[a,b[$	/

2) $]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \;/\; a < x \leq b\}$



3) $\phi = \{\}$: ensemble vide.

ATTENTION

- L'intersection $\cap$ des intervalles est intervalle.
- L'union $\cup$ des intervalles n'est pas forcément un intervalle.

Exemple $I =]1,3] \cup [5, 7[$

$\exists\, z = 1$, $1 < z = 4 < 7$ mais $4 \notin I$ donc I n'est pas un intervalle.

- $A = \{x \in \mathbb{Q} \;/\; 1 \leq x < \sqrt{5}\}$, A est-il un intervalle ? Justifier votre réponse.

On a $1 \in A$, $\frac{2}{3} \in A$ mais $1 \leq \sqrt{2} \leq \sqrt{5}$ et $\sqrt{2} \notin A$ donc A n'est pas un intervalle.

- **Définition** (Voisinage) Soit $a \in \mathbb{R}$, $V \subset \mathbb{R}$.

Un voisinage V d'un point a est un ensemble qui contient un ouvert qui comprend le point a.

V est un voisinage ssi il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subset V$.

Exemples $]3, 3{,}2[$ est un voisinage de π.

$]-\varepsilon, \varepsilon[$ " " " 0.

III Valeur Absolue. (Absolute value)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit la valeur absolue par:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0. \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Exemples

Propriétés: (4) $-|x| \leq x \leq |x|$

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| = 0 \iff x = 0$. (2) , $|x| \geq 0$ (1) , $|-x| = |x|$ (3)
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |x|$.
4. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $|x+y| \leq |x| + |y|$ Inégalité triangulaire
5. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} |x+y| \geq \big||x| - |y|\big| \\ |x-y| \geq \big||x| - |y|\big| \end{cases}$ Seconde inégalité trian...
6. $\forall x \in \mathbb{R}$. ensemble de sol

$$\begin{cases} \forall a \in \mathbb{R}^+, & |x| \leq a \iff -a \leq x \leq a \Rightarrow S = [-a, a]. \\ \forall a \in \mathbb{R}^-, & |x| \leq a \iff \text{Impossible} \Rightarrow S = \emptyset \end{cases}$$

7. $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \forall a \in \mathbb{R}^+, & |x| \geq a \Rightarrow (x \geq a \text{ ou } x \leq -a) \Rightarrow S =]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[\\ \forall a \in \mathbb{R}^-, & |x| \geq a \Rightarrow \text{évident (Toujours vérifiée)} \Rightarrow S = \mathbb{R}. \end{cases}$$

Preuve: 8- $|y-x|$ la distance entre x et y

(4)

- Montrons que $|x+y| \leq |x| + |y|$

on a: $-|x| \leq x \leq |x|$

$-|y| \leq y \leq |y|$

$-|x| \leq x \leq |x|$

$-|y| \leq y \leq |y|$

$-\left[|x|+|y|\right] \leq x+y \leq \left[|x|+|y|\right]$

Ainsi $|x+y| \leq |x|+|y|$.

d'après (6)

- Prouvons (6) TD $\big|x+y\big| \geq \big||x|-|y|\big|$.

- $|x| = |x+y-y| \leq |x+y| + |y| \Rightarrow |x|-|y| \leq |x+y|$

et - $|y| = |y+x-x| \leq |x+y| + |x| \Rightarrow |y|-|x| \leq |x+y|$

$\Rightarrow |x|-|y| \geq -|x+y|$

Ainsi $-|x+y| \leq |x|-|y| \leq |x+y|$

Donc $\big||x|-|y|\big| \leq |x+y|$ (d'où (6))

- Si on remplace y par $(-y)$ dans cette dernière inégalité on obtient.

$\big||x|-|-y|\big| \leq |x-y|$ or $|-y| = |y|$ donc

$\big||x|-|y|\big| \leq |x-y|$

Exemples

- $|-7| = 7$, $|2| = 2$.
- Résoudre (1) $\sqrt{(x+1)^2} = 2$ (2) $|3x-1| = -1$ $\rightarrow$ Impossible

(3) $|4x-1| = |2x+3|$ (7) $1 < |x-2| \leq 3$

(4) $|x-2| = 2-x$ (5) $|x-1| \leq 3$

(6) $|x-1| \leq -4$ $\leftarrow$ Impossible

Résolution.

(1) $\sqrt{(x+1)^2} = 2 \Rightarrow |x+1| = 2$ $\rightarrow$ $1 < \sqrt{(x-2)^2} \leq 3$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$
$\lvert x+1\rvert$	$-x-1$	0	$x+1$
$\lvert x+1\rvert = 2$	$-x-1=2$		$x+1=2$
	$S_1 =$ الحلول تقاطع الحل الذي تم ...		S_1

- Résolution
  - $x \in]-\infty, 1]$ et $(-x-1=2 \Rightarrow x=-3)$.
    $x=-3 \in]-\infty, 1]$ accepté $\Rightarrow S_1 = \{-3\}$.
  - $x \in [1, +\infty[$ et $(x+1=2 \Rightarrow x=1)$
    $x=1 \in [1, +\infty[$ accepté. $S_2 = \{1\}$.
- Conclusion : L'ensemble de solutions est
  $S = \{-3, 1\} = S_1 \cup S_2$.

(2) $|3x-1| = -1$ impossible donc $S = \phi$

(3) $|x-1| \leq -3$ " " $S = \phi$.
$|x-2| < 3$

(4) $1 < |x-2| \leq 3$. $\quad 1 < \sqrt{(x-2)^2} \leq 3$

		2	
$x-2$	$-$	0	$+$
$\lvert x-2\rvert$	$(-x+2)$		$x-2$
$1 < \lvert x-2\rvert \leq 3$	$1 < -x+2 \leq 3$		$1 < x-2 \leq 3$
Résolution	$-1 < -x \leq 1$		$3 < x \leq 5$
	$1 > x \geq -1$		$]3, 5] \subset [2, +\infty[$
	$[-1, 1[\subset]-\infty, 2]$		
Ensemble de sol	الحلول ∩ مجال الدراسة		

$S_1 =]-\infty, 2] \cap [-1, 1[= [-1, 1[$

$S = S_1 \cup S_2$

$S_2 = [2, +\infty[\cap]3, 5] =]3, 5]$

$= [-1, 1[\cup]3, 5]$.

III - Partie entière

Axiome d'Aximède . $\forall x \in \mathbb{R}$; $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que : $x \leq n$

Définition . Soit $x \in \mathbb{R}$, on appelle partie entière de x, l'unique entier $p \in \mathbb{Z}$ tel que $p \leq x < p+1$

notée $[x]$, $E(x)$ et $\lfloor x \rfloor$.

C'est le plus grand entier relatif inférieur ou = à x.

Exemples $[4,3] = 4$, $[0,91] = 0$, $[-7,2] = -8$

$E(-1) = -1$

Propriétés

1 . $\forall x \in \mathbb{R}$, $E(x) \leq x < E(x)+1$

2 . $\forall x \in \mathbb{R}$, $x - 1 < E(x) \leq x$

3 . $\forall x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, $E(x+n) = E(x)+n$ (voir TD)

4 . $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ avec $x < y \Rightarrow E(x) < E(y)$.

5 . $\forall n \in \mathbb{Z}$, $E(n) = n$.

6 . $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $E(x)+E(y) \leq E(x+y) \leq E(x)+E(y)+1$

⚠ Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ $E(x) < x < E(x)+1$

Preuve :

Prouvons (6) . On a

$E(x) \leq x < E(x)+1$

$E(y) \leq y < E(y)+1$

$E(x)+E(y) \leq x+y < E(x)+E(y)+2$

Comme La fonction $E(\cdot)$ est Croissante ↗, donc

$$E\Big(\underbrace{E(x)+E(y)}_{\in \mathbb{Z}}\Big) \leq E(x+y) < E\Big(\underbrace{E(x)+E(y)+2}_{\in \mathbb{Z}}\Big)$$

$E(x)+E(y) \leq E(x+y) < E(x)+E(y)+2$

Ainsi $E(x)+E(y) \leq E(x+y) \leq E(x)+E(y)+1$

Exo Examens

Remarques

1) si $2 \leq x < 3 \Rightarrow E(x) = 2$

2) Si $E(x) = 4 \Rightarrow 4 \leq x < 5$.

$E(y) \leq x < [y]+1$

Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \Rightarrow [x] \neq x$, si $y \in \mathbb{Z}$, $[y] = y$.

Résoudre des équations suivantes dans $\mathbb{R}$

① : $E(x+1)=5$ ② . $3E(x-4)=1$, $E(2x)>7$

- Résolution de $E(x+1)=5$

- $5 \in \mathbb{Z}$ donc ① possède une solution.
- $E(x+1)=5 \Rightarrow 5 \leq x+1 < 6$.

$\Rightarrow 4 \leq x < 5$.

$\Rightarrow x \in [4,5[\Rightarrow S=[4,5[$

l'ensemble de sol

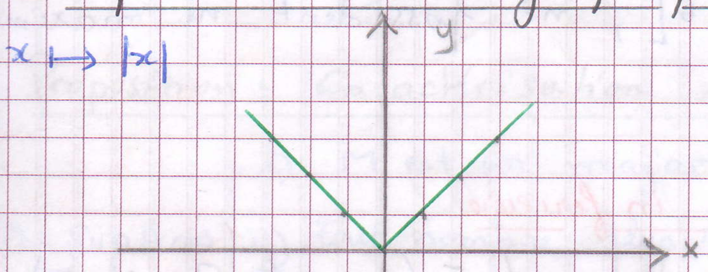
- Résolution de $3E(x-4)=1$.

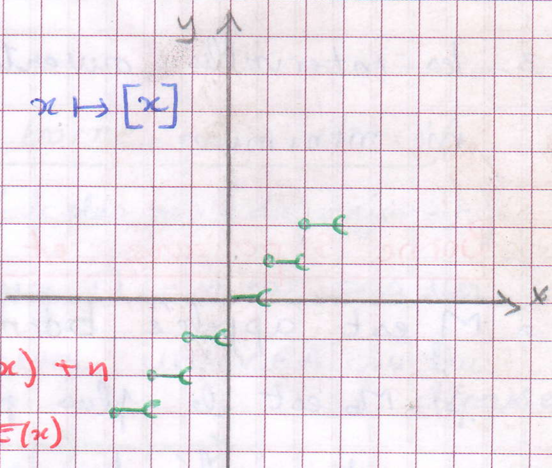
$3E(x-4)=1 \Rightarrow E(x-4)=1/3 \notin \mathbb{Z}$.

donc l'ép (2) ne possède pas de solutions.

Ainsi $S=\phi$.

Représentations graphiques





Ex Prouver que : $\left[\begin{array}{l} E(x+n) = E(x)+n \\ E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x) \end{array}\right.$

4) Majorant - Minorant - Minimum - Maximum - borne Superieure et borne inferieure

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, m et M des éléments de $\mathbb{R}$

- On dit que A est majoré s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in A$, $x \leq M$. M est appelé majorant de A
- On dit que A est minoré s'il existe $m \in \mathbb{R}$, tel que $\forall x \in A$, $x \geq m$. m est appelé minorant de A.
- On dit que A est borné, s'il existe m et M tel que $\forall x \in A$, $m \leq x \leq M$ (c.à.d majoré et minoré)

- L'élément M est dit le plus grand élément ou maximum de A si M est un majorant et $M \in A$

$$M = \max(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, & x \leq M. \\ M \in A. \end{cases}$$

- L'élément $m \in A$ est dit le plus petit élément ou minimum de A si m est un minorant et $m \in A$

$$m = \min(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, & x \geq m. \\ m \in A. \end{cases}$$

Remarques

1- le majorant et le minorant « s'ils existent », ils ne sont pas uniques.

2- Max A et Min A « s'ils existent », ils sont uniques.

3- les intervalles ouverts $]a, b[$, ne possèdent ni maximum ni minimum.

Borne Superieure et borne inferieure

- M est appelée borne superieure de E (on note $M = \sup E$) si M est le plus petit des majorants de E.
- m est appelé borne inferieure de E (on note $m = \inf E$) si m est le plus grand des minorants.

Théorème

1) Dans $\mathbb{R}$, toute partie non vide et majorée admet une borne superieure

2) Dans $\mathbb{R}$, toute partie non vide et minorée admet une borne inferieure.

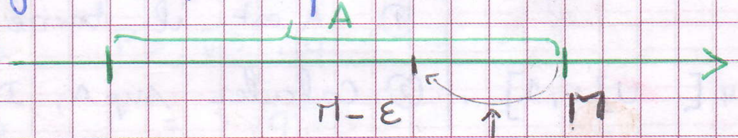
Exemples.

Ensemble A	Borné / Non	les majorants	les minorants	Sup A	Max A	Inf A	min A
$A=[1,2]$	borné	$[2,+\infty[$	$]-\infty,1]$	$\sup A=2 \in A$	$\min A=2$	$\inf A=1 \in A$	$\min A=1$.
$]4,5[$	"	$[5,+\infty[$	$]-\infty,4]$	$\sup A=5 \notin A$	$\min A$ n'exist pas	$\inf A=4 \notin A$	n'existe pas
$\{1,-5,9\}$	"	$[9,+\infty[$	$]-\infty,-5]$	$\sup A=9 \in A$	$\min A=9$	$\inf A=-5 \in A$	$\min A=-5$
$]-\infty,7]$	majoré seul^t	$[7,+\infty[$	n'existent pas car A n'est pas minoré.	$\sup A=7 \in A$	$\min A=7$	n'existe pas	n'existe pas
$\mathbb{N}$	minoré seul^t	n'existent pas	$]-\infty,0]$	$\nexists$ car $\mathbb{N}$ n'est pas majoré	$\nexists$	$\inf A=0 \in \mathbb{N}$	$\min A=0$.

Proposition : Caractérisation de la borne sup et inf

$M=\sup A \Leftrightarrow$
- i) M est un majorant de A (le plus petit des major-t)
- ii) Tout nombre plus petit que M, n'est pas un majorant, on peut trouver un $x \in A$ qui lui dépasse.

Explication



$\exists x_\varepsilon \in A, \quad M-\varepsilon < x_\varepsilon < M$

$$M=\sup A \Leftrightarrow \begin{cases} \text{i) } \forall x \in A, \quad x \leq M \\ \text{ii) } \forall \varepsilon > 0, \ \exists x_\varepsilon \in A, \quad M-\varepsilon < x_\varepsilon < M \end{cases}$$

Rq (On utilise ($\varepsilon > 0$) (epsilon) pour représenter une petite quantité positive arbitraire)

↘ Autrement dit : ε = epsilon = arbitrairement petit mais positif.

$\inf A = \min(\inf A_1, \inf A_2) = \min(2, 0) = 0 \notin A$

donc $\min A$ n'existe pas.

2 – $A = \{-1, 1, 2, 3\}$ $B = \{0, 1, 2, 4\}$

a) Calculer $\inf(A \cap B)$ et $\max(\inf A, \inf B)$

(on sait que $\inf(A \cap B) \geq \max(\inf A, \inf B)$
$\sup(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B)$)

- $A \cap B = \{1, 2\}$ $\Rightarrow \inf A \cap B = 1$
- $\inf A = -1$, $\inf B = 0$ et $\max(\inf A, \inf B) = 0$

$\inf(A \cap B) \geq \max(\inf A, \inf B)$

b) Calculer $\sup(A \cap B)$ et $\min(\sup A, \sup B)$

- $\sup(A \cap B) = 2$
- $\sup A = 3$, $\sup B = 4$ et $\min(\sup A, \sup B) = 3$

$\sup(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B)$.

Corrigé : Montrer que $\sqrt{3}$ et $\sqrt{6}$ et $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ sont irrationnels.

- Montrons que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

supposons par l'absurde que $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$. Il existe donc $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}^*$ tel que $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ et $p \wedge q = 1$

$\sqrt{3} = \frac{p}{q} \Rightarrow p = \sqrt{3} \cdot q$

$\Rightarrow p^2 = 3 \cdot q^2$

$\Rightarrow p \cdot p = 3 \cdot q \cdot q$ (*) (3 premier divise $p \cdot p$ $\xrightarrow{\text{Euclide}}$ $3 \mid p$ ou $3 \mid p$

$\xrightarrow{\text{Euclide}}$ 3 divise p (ou p est multiple de 3)

Il existe $k \in \mathbb{Z}$ / $p = 3k$.

(*) $\Rightarrow 9k^2 = 3 \cdot q \cdot q$

$\Rightarrow 3k^2 = q \cdot q$

$\Rightarrow$ 3 divise q^2 et 3 premier

$\Rightarrow$ 3 divise q

On a donc 3 divise p et q à la fois. Contradiction avec $p \wedge q = 1$. Conclusion $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Preuve de la proposition 1 :

Supposons que A et B sont deux parties non vides, bornées avec $A \subset B$.

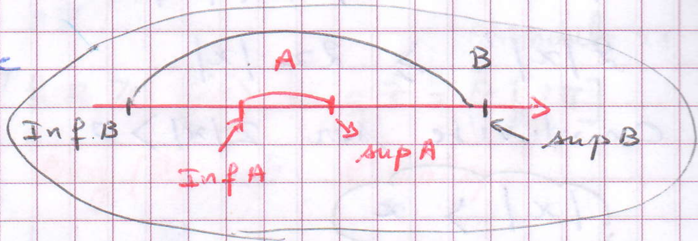
Montrons que : $\begin{cases} \sup A \leq \sup B \\ \inf A \geq \inf B \end{cases}$

- A et B sont bornés, non vide donc $\sup A$, $\sup B$, $\inf A$ et $\inf B$ existent.

- Comme B est majoré donc $\forall x \in B$, $x \leq \sup B$

Or, $A \subset B$, donc les éléments de A sont des éléments de B, donc

$\forall x \in A$, $x \leq \sup B$



Ceci implique que :

$\sup B$ est un majorant de A. (un des majorants de A)

et comme par définition ($\sup A$) est le plus petit des majorants de A, donc forcément

$$\boxed{\sup A \leq \sup B}$$

- De la même manière pour $\inf A \geq \inf B$.

Comme B est minoré, donc $\forall x \in B$, $x \geq \inf B$

or $A \subset B$ donc $\forall x \in A$, $x \geq \inf B$

donc $\inf B$ est un minorant de B. Par définition $\inf A$ est le plus grand des minorants, donc forcément : $\inf A \geq \inf B$.