Suites et Limites

Une **suite** est une liste ordonnée de nombres réels notée (u_n). Elle peut être définie par :

- une **formule explicite** : $u_n = f(n)$;
- une **relation de récurrence** : $u_{n+1} = g(u_n)$.

1. Convergence et Divergence

Convergence : Une suite (u_n) **converge** vers un réel L si ses termes se rapprochent de L lorsque $n \to +\infty$.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = L \quad ou \quad u_n \to L.$$

Divergence : Une suite diverge si elle n'admet pas de limite finie.

- **Divergence vers** $+\infty$: $u_n \to +\infty$.
- **Divergence vers** $-\infty$: $u_n \to -\infty$.
- **Oscillation (pas de limite)** : par exemple $((-1)^n)$.

2. Suites monotones

- **Croissante** : $u_{n+1} \geq u_n$.
- **Décroissante** : $u_{n+1} \leq u_n$.

Théorème : Une suite **monotone et bornée** est **convergente**.

3. Opérations sur les limites

Si $u_n \to a$ et $v_n \to b$, alors :

$$u_n + v_n \to a + b, \qquad u_n v_n \to ab,$$

et si $b \neq 0$:

$$\frac{u_n}{v_n} \to \frac{a}{b}.$$

4. Suites usuelles

Suite géométrique : $u_n = ar^n$.

$$|r| < 1 \quad \Rightarrow \quad u_n \to 0.$$

Suite arithmétique : $u_n = a + nr$.

$$r > 0 \Rightarrow u_n \to +\infty.$$

5. Limites importantes

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0 \ (p > 0),$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$