Limites et Continuité des Fonctions : Propriétés et Théorèmes Importants

1. Limite d'une fonction

Soit $f : D \to R$ et a un point de l'ensemble d'accumulation de D. On dit que f admet une **limite** L en a si :

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

c'est-à-dire : lorsque x s'approche de a, les valeurs $f(x)$ s'approchent de L.

Limites usuelles :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty.$$

2. Propriétés des limites

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ et $\lim_{x \to a} g(x) = M$, alors :

$$\lim_{x \to a} (f + g)(x) = L + M, \qquad \lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = LM,$$

et si $M \neq 0$:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}.$$

Continuité des opérations : Les fonctions polynômiales, rationnelles (hors dénominateur nul), trigonométriques usuelles, exponentielle et logarithme sont continues sur leur domaine.

3. Continuité

Une fonction f est **continue en un point** a si :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Elle est **continue sur un intervalle** si elle est continue en tout point de cet intervalle.

4. Théorèmes importants sur la continuité

(1) Théorème des valeurs intermédiaires (TVI) Si f est continue sur un intervalle $[a, b]$ et si k est un réel entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que :

$$f(c) = k.$$

(2) Théorème de la bijection Si f est continue et strictement monotone sur $[a, b]$, alors :

- f est bijective,
- son inverse f^{-1} est continue.

(3) Théorème de la limite monotone Une fonction monotone sur un intervalle ouvert a toujours des limites finies ou infinies aux bords de l'intervalle.

(4) Théorème de Weierstrass Si f est continue sur un intervalle fermé et borné $[a, b]$, alors :

- f est bornée,
- f atteint un minimum et un maximum sur $[a, b]$.

5. Cas de discontinuité

Une fonction peut être :

- **discontinue par saut** : $\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$;
- **discontinue asymptotique** : limite infinie ;
- **discontinue essentielle** : limite n'existe pas.