

TD N1

Exercice 1

1. Un bras manipulateur à articulation flexible peut être modélisé par le système suivant :

$$\begin{aligned} I\ddot{q}_1 + M g L \sin(q_1) + K(q_1 - q_2) &= 0 \\ J\ddot{q}_2 - K(q_1 - q_2) &= u \end{aligned}$$

où q_1, q_2 sont les positions angulaires, I, J les moments d'inertie, K la constante de force de rappel, M la masse totale, L la distance et u le couple d'entrée. Choisir les variables d'états pour ce système et écrire les équations d'état.

2. Les équations dynamiques non linéaires d'un m-bras manipulateur à articulations flexibles prennent la forme :

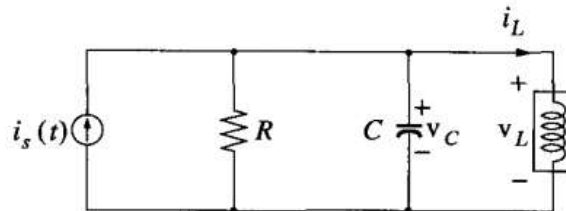
$$\begin{aligned} M(q_1)\ddot{q}_1 + H(q, \dot{q}) + K(q_1 - q_2) &= 0 \\ J\ddot{q}_2 - K(q_1 - q_2) &= u \end{aligned}$$

où q_1, q_2 sont les m-dimensionnel vecteur de coordonnées généralisées, $M(q_1)$ et J les matrices d'inertie symétriques et non singulières. Le terme $H(q, \dot{q})$ contient les forces centrifuges, Coriolis et de gravité, K est une matrice des constantes de rappel, M la masse totale, L la distance et u entrée de commande m-dimensionnelle.

Choisir les variables d'états pour ce système et écrire les équations d'état.

Exercice 2

Le circuit de la figure ci-dessous contient une inductance non linéaire décrite par $i_L = L\Phi_L + \mu\Phi_L^3$, où Φ_L est le flux magnétique de l'inductance et L, μ sont des constantes positives.



1. En utilisant Φ_L et v_C comme variable d'état, trouver les équations d'état.
2. Trouver tous les points d'équilibre lorsque $i_s = 0$.

Exercice 3

Le four de verrerie, illustré par la figure ci-dessous, est un procédé industriel dont les parois sont construites en matériau réfractaire et dans lequel on fait fondre un mélange de sable, de chaux et d'autres additifs pour obtenir du verre. Cette fusion est obtenue par un apport énergétique à l'intérieur du four, provenant par exemple de brûleurs à gaz disposés au dessus du bain de verre. Le verre fondu est extrait du four de manière continue pour alimenter les machines en aval. En faisant l'hypothèse que la température du verre est homogène dans le four et que celui-ci est parfaitement isolé, nous pouvons écrire les deux équations suivantes, correspondant à un bilan massique et à un bilan énergétique du procédé. Nous écrivons donc que la variation de masse ou d'énergie, par unité de temps, dans le système considéré est égale à la somme de ce qui rentre dans le système, en termes de masse et de chaleur, diminuée ce qui en sort, toujours durant la même unité de temps :

$$\frac{dM}{dt} = P_{in} - P_{out}$$

$$\frac{dCTM}{dt} = Q_{in} + C_{in}T_{in}P_{in} - CTP_{out}$$

où :

M : masse du verre en fusion dans le four (kg),

T : température du verre en fusion dans le four (K),

T_{in} : température de la matière première enfournée (K),

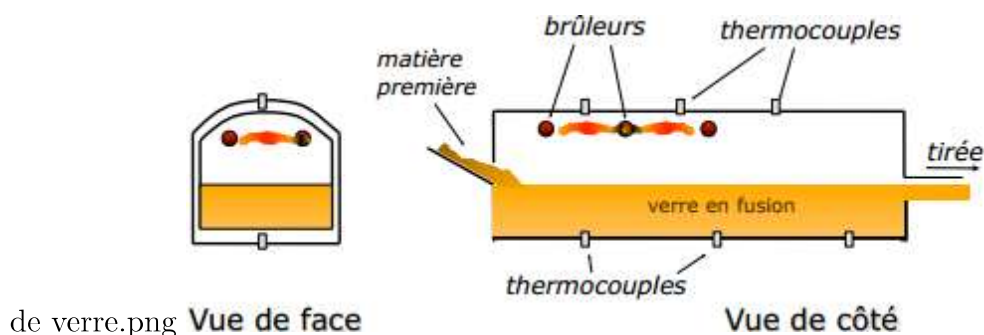
C : chaleur spécifique du verre (J/Kkg),

C_{in} : chaleur spécifique de la matière première (J/Kkg),

Q_{in} : quantité de chaleur fournie par unité de temps (J/s),

P_{in} : masse enfournée par unité de temps (kg/s),

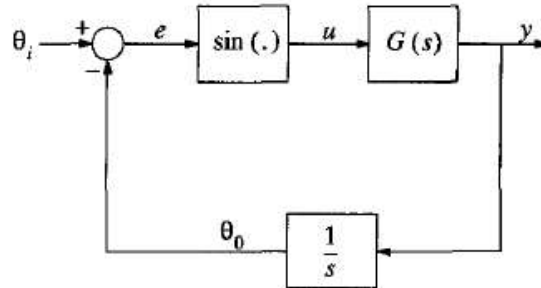
P_{out} : masse tirée par unité de temps (kg/s).



Écrire les équations d'états en choisissant les variables d'état : M la masse du verre en fusion et CT la quantité de chaleur par unité de masse de verre en fusion et les variables d'entrée : P_{in} , P_{out} et Q_{in} .

Exercice 4

Une boucle à verrouillage de phase peut être représentée par le schéma suivant :



Soit $\{A, B, C\}$ une réalisation minimale de la fonction de transfert scalaire et strictement propre $G(s)$. Supposons que toutes les valeurs propres de A sont à partie réelle négative, que $G(0) \neq 0$ et que $\theta_i = \text{constante}$. Soit z l'état de la réalisation $\{A, B, C\}$.

1/ Montrer que la boucle fermée du système peut être représentée par les équations d'état :

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Az + B \sin(e) \\ \dot{e} &= -Cz\end{aligned}$$

2/ Trouver tous les points d'équilibre du système.

3/ Montrer que lorsque $G(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$, la boucle fermée correspond à une équation du pendule.

Exercice 5

Soit le système dynamique décrit par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 - \mu x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= x_1 - \mu x_2(x_1^2 + x_2^2)\end{aligned}$$

1. Trouver le(s) point(s) d'équilibre du système.
2. Admettons le changement de coordonnées suivant : $x_1 = r \cos(\theta)$, $x_2 = r \sin(\theta)$, avec r et θ les coordonnées polaires. Discuter en fonction du paramètre μ , l'évolution des trajectoires.