

## TD N2

### Exercice1

Pour chacun des systèmes suivants, trouver tous les points d'équilibre et déterminer le type de chaque équilibre.

1.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \frac{1}{6}x_1^3 - x_2\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= 0.1x_1 - 2x_2 - x_1^2 - 0.1x_1^3\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_2(1 - 3x_1^2 - 2x_2^2)\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 1) \\ \dot{x}_2 &= (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 1)\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2^3\end{aligned}$$

### Exercice2

1/ Soit le système

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1\end{aligned}$$

Montrer que ce système possède une orbite périodique définie dans la région  $M = \{c_1 \leq v(x) \leq c_2\}$  où  $v(x) = x_1^2 + x_2^2$  et  $c_2 > c_1 > 0$

2/ Idem pour

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -2x_1 + x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2)\end{aligned}$$

avec  $M = \{v(x) \leq c\}$ ,  $v(x) = x_1^2 + x_2^2$  et  $c > 0$

**Exercice3**

Considérons le système

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= ax_1 - x_1x_2 \\ \dot{x}_2 &= bx_1^2 - cx_2\end{aligned}$$

où  $a, b, c$  sont des constantes positives avec  $c > a$

Montrer que ce système ne possède pas d'orbite périodique dans l'ensemble

$$D = \{x \in \mathbb{R}^2 / x_2 \geq 0\}$$