

Chapitre 3

Stabilité des systèmes

Une étape du travail de l'automaticien consiste très souvent à étudier la stabilité, que ce soit celle du système considéré tel quel, libre de tout contrôle, ou bien celle du même système augmenté d'une structure de commande particulière. Dès lors, il peut s'avérer utile, voire nécessaire, de se demander ce qu'est la stabilité. Comment la définit-on ? Comment la conceptualiser et la formaliser ? Quels sont les critères qui permettent de conclure au comportement stable d'un système ?

La classe des systèmes considérés sera celle des systèmes pouvant être mis sous la forme de l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\dot{x} = f(x) \quad (3.1)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état et $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction localement lipschitzienne et continue sur un domaine D de $\mathbb{R}^n$.

3.1 Stabilité des équilibres

Physiquement parlant, on dit qu'un système est stable si, déplacé de sa position d'équilibre, il tend à y revenir, instable s'il tend à s'en écarter davantage figure 3.1.



FIGURE 3.1 – Illustration de la définition intuitive de la stabilité.

Mathématiquement parlant, ceci se traduit par les définitions suivantes :

Définition 3.1. *l'équilibre $x = 0$ est dit :*

- **stable**, si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour toute solution $x(t)$ de (3.1) on ait :

$$\|x(0)\| < \eta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon \quad \forall t \geq 0.$$

- **instable**, s'il n'est pas stable, ie si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour toute solution $x(t)$ de (3.1) on ait :

$$\|x(0)\| < \eta \Rightarrow \|x(t)\| \geq \epsilon \quad \forall t \geq 0.$$

- **attractif**, s'il existe $r > 0$ tel que pour toute solution $x(t)$ de (3.1) on ait :

$$\|x(0)\| < r \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

Le bassin d'attraction de l'origine est défini par l'ensemble $\mathbb{B}$ tel que

$$x(0) \in \mathbb{B} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

- **globalement attractif**, si pour toute solution $x(t)$ de (3.1) on ait :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0. \quad \text{Dans ce cas, } \mathbb{B} = \mathbb{R}^n.$$

- **asymptotiquement stable**, s'il est stable et attractif, et **globalement asymptotiquement stable GAS**, s'il est stable et globalement attractif.
- **exponentiellement stable**, s'il existe $r > 0$, $M > 0$ et $\alpha > 0$ tels que pour toute solution $x(t)$ de (3.1) on ait :

$$\|x(0)\| < r \Rightarrow \|x(t)\| \leq M\|x(0)\|e^{-\alpha t}. \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

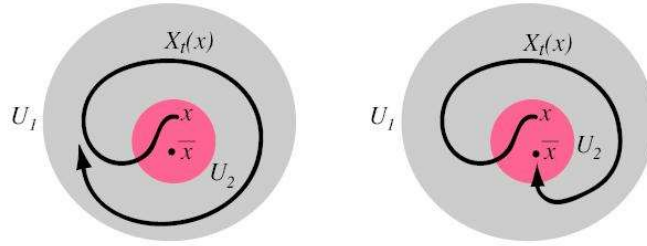
et **globalement exponentiellement stable GES**, s'il existe $M > 0$ et $\alpha > 0$ tels que pour toute solution $x(t)$ de (3.1) on ait :

$$\|x(t)\| \leq M\|x(0)\|e^{-\alpha t} \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Remarque 3.1. 1. La différence entre stable et asymptotiquement stable se traduit par le fait qu'une petite perturbation sur l'état initial d'un système autour d'un point d'équilibre $\bar{x}$ stable peut engendrer des petites oscillations entretenues, alors qu'elles s'amortissent au cours du temps dans le cas d'un point d'équilibre asymptotiquement stable figure 3.2 (U_1 est la boule de centre 0 et de rayon ϵ et U_2 est la boule de centre 0 et de rayon η)

2. Pour un système linéaire, toutes ces définitions sont équivalentes (sauf entre stable et asymptotiquement stable), par contre, pour un système non linéaire, stable n'implique pas attractif, attractif n'implique pas stable, asymptotiquement stable n'implique pas exponentiellement stable alors que exponentiellement stable implique asymptotiquement stable.

Lorsque les systèmes sont représentés par des équations différentielles non linéaires, le problème de la vérification de la propriété de stabilité n'est pas trivial. À l'inverse, la vérification de cette même propriété pour les systèmes linéaires est systématique et est déterminée de la manière suivante :

FIGURE 3.2 – Stabilité (à gauche) et stabilité asymptotique (à droite) de $\bar{x}$.

3.2 Stabilité de l'origine

Considérons le système linéaire

$$\dot{x} = Ax \quad (3.2)$$

où A est une matrice carrée d'ordre n . Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_s$, les valeurs propres distinctes de multiplicité algébrique $m(\lambda_i)$ de la matrice A .

Théorème 3.1. 1. Si $\exists j \operatorname{Re}(\lambda_j) > 0$ ou si $\exists k \operatorname{Re}(\lambda_k) = 0$ et $m(\lambda_k) > 1$ alors $x = 0$ est instable.
 2. Si $\forall j \operatorname{Re}(\lambda_j) < 0$ alors $x = 0$ est exponentiellement (donc asymptotiquement) stable.
 3. Si $\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0$ et si $\exists k \operatorname{Re}(\lambda_k) = 0$ et $m(\lambda_k) = 1$ alors $x = 0$ est stable mais non attractif.

Malheureusement, il n'existe pas de théorème équivalent à celui des valeurs propres pour les systèmes non linéaire; à la limite, on peut dans certains cas, caractériser la stabilité de l'origine par l'étude de la stabilité du système linéarisé.

3.3 Approximation linéaire d'un système

Considérons un système de la forme (3.1), on note

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x})$$

la matrice jacobienne de f évaluée au point d'équilibre $x = \bar{x}$, le système obtenu sera de la forme (3.2) et s'appelle le linéarisé (ou l'approximation linéaire) du système non linéaire (3.1)

Théorème 3.2. 1. Si $x = 0$ est asymptotiquement stable pour (3.2) alors $x = \bar{x}$ l'est pour (3.1).
 2. Si $x = 0$ est instable pour (3.2) alors $x = \bar{x}$ l'est pour (3.1).
 3. Si $x = 0$ est stable mais non asymptotiquement stable pour (3.2) alors on ne peut rien dire sur la stabilité de $x = \bar{x}$ pour (3.1).

Une autre méthode permettant de conclure au comportement stable d'un système, cette fois linéaire et non linéaire est décrit par la partie suivante.

3.4 Méthode directe de *Lyapunov*

Le principe de cette méthode est une extension mathématique du phénomène physique suivant : si l'énergie totale (de signe positif) d'un système mécanique ou électrique ne fait que décroître (dissipée de façon continue) alors le système tend à rejoindre une configuration à énergie minimale (voire même l'état d'équilibre). Autrement dit, pour conclure quant à la stabilité d'un système, il suffit d'examiner les variations d'une certaine fonction scalaire dite de *Lyapunov* sans avoir besoin de la solution explicite du système. C'est précisément le point fort de cette méthode car l'équation du mouvement de $x(t)$ n'a pas à être résolue pour caractériser l'évolution de la solution (car en dehors des systèmes linéaires, la détermination des solutions explicites est difficile voire impossible).

Fonctions de *Lyapunov* Considérons le système

$$\dot{x} = f(x) \quad \text{avec } f(0) = 0 \quad (3.3)$$

$x = 0$ est un équilibre pour (3.3) et $D \subset \mathbb{R}^n$ un domaine qui contient $x = 0$. Soit $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable admettant des dérivées partielles continues. On note

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} \cdot f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} \cdot f_i(x)$$

la dérivée de la fonction V dans la direction du champ de vecteur f .

Définition 3.2. On dit que V est une fonction de *Lyapunov* pour le système (3.3) en $x = 0$ dans D , si pour tout $x \in D$ on a

- $V(x) > 0$ sauf en $x = 0$ où $V(0) = 0$
- $\dot{V}(x) \leq 0$.

Théorème 3.3. 1. S'il existe une fonction de *Lyapunov* pour (3.3) en $x = 0$ dans un voisinage D de 0, alors $x = 0$ est stable.

2. Si de plus, $x \neq 0 \Rightarrow \dot{V}(x) < 0$ alors $x = 0$ est asymptotiquement stable.

3. Si de plus $D = \mathbb{R}^n$ et $V(x) \rightarrow \infty$ quand $\|x\| \rightarrow \infty$ alors $x = 0$ est GAS.

Remarque 3.2. 1. $\dot{V}$ dépend seulement de x , elle est appelée parfois la dérivée de V le long de la trajectoire du système.

2. Cette dérivée s'appelle aussi la dérivée de Lie et se note $L_f V$.

3. Pour calculer $\dot{V}$, on n'a pas besoin de x mais de $\dot{x}$ i.e de $f(x)$, aussi, pour la même fonction $V(x)$, $\dot{V}$ est différente pour différents systèmes.

4. Pour toute solution $x(t)$ de (3.3), on a : $\frac{d}{dt} V(x(t)) = \dot{V}(x(t))$, par conséquent si $\dot{V}$ est négative, V décroît le long de la solution de (3.3) de sorte que les trajectoires convergent vers le minimum de V .

5. Lorsque $V(x) \rightarrow \infty$ quand $\|x\| \rightarrow \infty$, $V(x)$ est dite radialement non bornée.

6. $V(x)$ est souvent une fonction qui représente l'énergie ou une certaine forme de l'énergie du système.

7. De point de vue géométrique, on regarde une fonction de Lyapunov comme une sorte de bol dont le minimum coïncide avec le point d'équilibre. Si ce point est stable, alors le vecteur vitesse $\dot{x}$ (ou f), tangent à toute trajectoire va "pointer" vers l'intérieur du bol figure 3.3

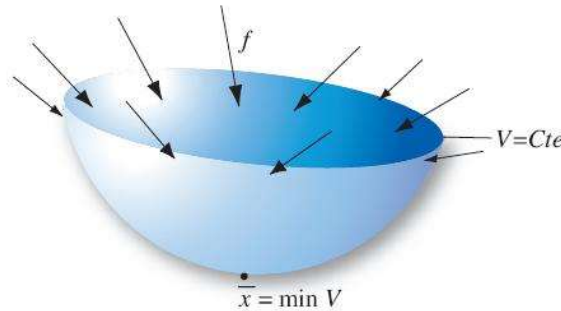


FIGURE 3.3 – Fonction de Lyapunov V pour le champ de vecteurs f : f est rentrant sur chaque ensemble de niveau de V et convergent vers le minimum de V .

Lorsque la dérivée de la fonction de Lyapunov n'est pas strictement négative, le théorème suivant permet d'obtenir encore la stabilité asymptotique.

Principe d'invariance de LaSalle

Définition 3.3. Un ensemble $G \subseteq \mathbb{R}^n$ est dit positivement invariant si toute solution $x(t)$ telle que $x(0) \in G$ reste dans G pour tout $t \geq 0$.

si $\bar{x}$ est un point d'équilibre alors $\{\bar{x}\}$ est positivement invariant.

Théorème 3.4. (Lyapunov-LaSalle) Soit $V : D \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction admettant des dérivées partielles continues et telle qu'il existe l pour lequel la région D_l définie par $V(x) < l$ soit bornée et $\dot{V}(x) \leq 0$ pour tout $x \in D_l$. Soit $R = \{x \in D_l : \dot{V}(x) = 0\}$ et soit M le plus grand ensemble positivement invariant inclus dans R . Alors toute solution issue de D_l tend vers M quand $t \rightarrow \infty$. En particulier si $\{0\}$ est la seule orbite contenue dans R alors $x = 0$ est asymptotiquement stable et D_l est contenu dans son bassin d'attraction.

Théorème 3.5. Soit $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction admettant des dérivées partielles continues. On suppose que $V(x)$ est radialement non bornée et que $\dot{V}(x) \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Soit $R = \{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\}$ et soit M le plus grand ensemble positivement invariant inclus dans R . Alors toutes les solutions tendent vers M quand $t \rightarrow \infty$. En particulier si $\{0\}$ est la seule orbite contenue dans R alors $x = 0$ est GAS.

Remarque 3.3. 1. Les critères de stabilité et de stabilité asymptotique présentés dans les théorèmes 3.3, 3.4 et 3.5 sont faciles à utiliser, mais ne donnent aucune informations sur les méthodes pour construire des fonctions de Lyapunov. En réalité, il n'existe pas de méthode générale sauf pour certaines classes particulières de systèmes (notamment la classe des systèmes linéaires).

2. Les théorèmes énoncés précédemment présentent des conditions suffisantes dans le sens que si pour une certaine fonction de Lyapunov V , les conditions sur $\dot{V}$ ne sont pas satisfaites, ceci n'implique nullement que le système considéré soit instable (peut être qu'avec une autre fonction on arrive à démontrer la stabilité du même système).
3. À l'inverse des fonctions de Lyapunov qui garantissent la stabilité d'un équilibre, il existe des fonctions dites de Chetaev qui garantissent l'instabilité des équilibres. Notons qu'il est encore plus difficile de démontrer l'instabilité que la stabilité !

3.4.1 Cas linéaire

Pour les systèmes linéaires, il est d'usage de considérer les fonction quadratiques comme fonction candidates de *Lyapunov* :

$$V(x) = x^T P x$$

où P est une matrice symétrique, définie positive. La dérivée de V le long des trajectoires du SL est donnée par :

$$\dot{V}(x) = x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x = x^T (PA + A^T P)x = -x^T Q x$$

où Q est une matrice symétrique, définie par :

$$PA + A^T P = -Q \quad (3.4)$$

Si Q est définie positive, alors on peut conclure par le théorème (3.3) que l'origine est asymptotiquement stable c'est à dire $Re(\lambda_i) < 0$ pour toutes les valeurs propres de A .

Pour les SL, on peut inverser l'ordre de ces deux étapes. Supposons qu'on commence par choisir Q comme une matrice symétrique définie positive, il suffit alors de résoudre (3.4) pour P . L'équation (3.4) est dite l'équation de *Lyapunov*.

Théorème 3.6. Une matrice A est dite de Hurwitz, c'est à dire $Re(\lambda_i) < 0$ pour toutes les valeurs propres de A , si et seulement si pour toute matrice définie positive et symétrique Q , il existe une matrice définie positive et symétrique P satisfaisant l'équation de Lyapunov (3.4). De plus, si A est Hurwitz, alors P est l'unique solution de (3.4).

Exemple 3.1. Soit

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ et } P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

où $p_{12} = p_{21}$

$$\begin{bmatrix} p_{11} & -p_{11} - p_{12} \\ p_{22} & -p_{12} - p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{12} & p_{22} \\ -p_{11} - p_{12} & -p_{12} - p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

En résolvant le système :

$$\begin{aligned} 2p_{12} &= -1 \\ -p_{11} - p_{12} - p_{22} &= 0 \\ p_{22} - p_{11} - p_{12} &= 0 \\ -2p_{12} - 2p_{22} &= -1 \end{aligned}$$

On obtient :

$$P = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice P est définie positive puisque ses mineurs principaux (1.5 et 1.25) sont positifs. Par conséquent, toutes les valeurs propres de A sont dans le demi plan complexe négatif.

Remarque 3.4. Soit le système $\dot{x} = f(x)$, avec $f(\bar{x}) = 0$ pour $\bar{x} \neq 0$. Considérons le changement de variable $y = x - \bar{x}$. La dérivée est donnée par :

$$\dot{y} = \dot{x} = f(x) = f(y + \bar{x}) = g(y) \quad \text{où} \quad g(0) = 0$$

Dans la nouvelle variable y , le système possède un équilibre à l'origine.

Ainsi, on peut toujours supposer, sans perte de généralité, que $f(x)$ satisfait $f(0) = 0$ et étudier la stabilité de l'origine.

3.4.2 Stabilisation d'un système

Le problème de stabilisation consiste à maintenir le système près d'un équilibre y^* . Il s'agit de construire des lois de commande dites stabilisantes telles que y^* soit un équilibre asymptotiquement stable du système soumis à ces lois de commande.

Remarque 3.5. 1. Le problème de suivi de trajectoire consiste à maintenir le système le long d'une trajectoire désirée $y_d(t)$, $t \geq 0$, ie, de trouver un contrôle tel que pour toute condition initiale dans une région D , l'erreur entre la sortie et la sortie désirée

$$e(t) = y(t) - y_d(t)$$

tend vers 0 quand $t \rightarrow \infty$, de plus l'état reste borné.

2. Notons qu'un problème de stabilisation autour de l'équilibre y^* est un cas particulier du problème de suivi de trajectoire où

$$y_d(t) = y^*, \quad t \geq 0$$

